Regularität schwacher Lösungen nichtlinearer elliptischer und parabolischer Systeme partieller Differentialgleichungen mit Entartung. Der Fall $1 < p < 2$

D I S S E R T A T I O N

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium
(dr. rer. nat.)
im Fach Mathematik

eingereicht an der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II
Humboldt-Universität zu Berlin

von
Herr Dipl.-Math. Jörg Wolf
geboren am 18.05.1966 in Plauen

Präsident der Humboldt-Universität zu Berlin:
Prof. Dr. J. Mlynek

Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II:
Prof. Dr. E. Kulke

Gutachter:

1. Prof. Joachim Naumann
2. Prof. Jens Frehse
3. Prof. Per-Anders Evert

eingereicht am:	2. November 2001
Tag der mündlichen Prüfung:	31. Mai 2002

Vorwort

Der größte Teil der vorliegenden Arbeit ist das Resultat meiner dreijährigen Forschungstätigkeit im Rahmen des Graduiertenkollegs „Geometrie und nichtlineare Analysis“ an der Humboldt-Universität zu Berlin. Mein Hauptanliegen war es, die von S. Campanato in seiner 1982 in Milano veröffentlichten Arbeit bewiesenen Regularitätsresultate für schwache Lösungen *q-elliptischer Systeme* zu vervollständigen, wobei ich mich hauptsächlich auf den Fall $1 < q < 2$ konzentriert habe. Hierbei konnte ich die bisher offene Frage, ob auch bei Raumdimension n größer als $q + 2$, partielle Regularität der schwachen Lösung vorliegt, unter der Voraussetzung klären, wenn der Stetigkeitsmodul der Koeffizienten des Hauptteils des elliptischen Systems einer sogenannten **Dini-Bedingung** genügt. Neu hierbei ist die Anwendung eines Verfahrens, welches sowohl die direkte als auch die indirekte Methode einschließt.

Darüber hinaus betrachten wir parabolische Systeme des gleichen Typs, für die es bisher meines Wissens in dieser Allgemeinheit noch keine Resultate gibt. Um so überraschender ist es deshalb, zu analogen Resultaten wie im elliptischen Fall zu gelangen (allerdings unter der zusätzlichen Voraussetzung $q > \frac{2n}{n+2}$), obwohl eines der wichtigsten Hilfsmittel, höhere Integrierbarkeit nach M. Giaquinta und G. Modica, nicht zur Verfügung steht und somit ein noch offenes Problem darstellt. Am deutlichsten wird dies, wenn man den Beweis unserer Aussagen für den Spezialfall $n = 2$ betrachtet, wo wir eine neue Variante der direkten Methode entwickelten, welche auch ohne höhere Integrierbarkeit auskommt.

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei Prof. T. Friedrich bedanken, dem Leiter des Graduiertenkollegs, für das angenehme Arbeitsklima während der Zeit der Teilnahme am Graduiertenkolleg und für die vielen Möglichkeiten, an verschiedenen Konferenzen und Forschungsseminaren im In- und Ausland teilzunehmen. Ganz besonderen Dank gilt Prof. J. Naumann und Prof. P.-A. Ivert (Universität Lund), für die vielen fruchtbaren Diskussionen und Anregungen auf dem Gebiet der partiellen Differentialgleichungen. Außerdem bedanke ich mich ganz herzlich bei Prof. J. Stara und Prof. O. John (Karls-Universität Prag), Prof. M. Marino und Prof. A. Maugeri (Università di Catania) sowie Prof. J. Frehse (Universität Bonn) für die vielen wertvollen Bemerkungen zum gemeinsamen Forschungsgegenstand und für ihre große Gastfreundschaft während meiner Besuche an den jeweiligen Universitäten.

Berlin, den 22.10.2001

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Einführung

Bei der Behandlung partieller Differentialgleichungen, die zu einem sehr großen Teil aus Modellen der Physik stammen (Verhalten elastischer Körper, Bewegung in Flüssigkeiten, Halbleitergleichungen, Variationsgleichungen und Variationsungleichungen usw.) stellt sich nicht nur die Frage nach der Existenz der Lösung, sondern auch nach deren Regularitätseigenschaften. Schon D. Hilbert hat dieses Problem in seinem berühmten, im Jahre 1900 in Paris vor dem Internationalen Kongreß der Mathematiker gehaltenen Vortrag, dargelegt, welche uns heute als das 19. und das 20. Hilbertsche Problem bekannt sind. Sie haben den folgenden Wortlaut:

1. 19. Problem: Ist die Lösung eines regulären Variationsproblems stets analytisch?

2. 20. Problem: Hat jedes reguläre Variationsproblem, unter geeigneten Randbedingungen eine Lösung, vorausgesetzt ...

Auf der Suche nach der Lösung dieses Problems begannen verschiedene Mathematiker u.a. Bernstein, Hopf, Radò, Caccioppoli, Petrowski, C.B. Morrey, das Gebiet der Regulariätstheorie zu entwickeln, welches somit zu einem bedeutenden Forschungsgegenstand innerhalb des Gebietes der partiellen Differentialgleichungen und besonders bei deren Untersuchung wurde.

Insbesondere stellte sich mit der Einführung der Sobolev-Räume die Frage nach der Regularität der sogenannten *schwachen Lösung* partieller Differentialgleichungen, wodurch die Regularitätstheorie immer mehr an Bedeutung gewonnen hatte. An dieser Stelle möchten wir eine Arbeit von E. De Giorgi [De Giorgi (1957)] erwähnen, die im Jahre 1957 erschien und eine endgültige Antwort auf die Hilbertsche Frage für schwache Lösungen einer bestimmten Klasse nichtlinearer elliptischer Differentialgleichungen lieferte. De Giorgis Verdienst war es, erstmals zu zeigen, daß eine beliebige schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen) einer linearen elliptischen partiellen Differentialgleichung mit meßbaren beschränkten Koeffizienten Hölder-stetig ist. Hieraus folgerte man, daß jede schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ des nichtlinearen Systems

(0.1) $$\operatorname{div} A(\nabla u) \,=\, 0 \quad \text{in} \quad \Omega$$

zu $C^\infty(\Omega)$ gehört, falls die Koeffizienten beliebig oft differenzierbar sind und der Elliptizitätsbedingung

(0.2) $$\frac{\partial A^\alpha}{\partial \xi_\beta}(\xi)\eta_\alpha\eta_\beta \,\geq\, \nu_0|\xi|^2 \quad \forall\, \xi, \eta \in \mathbb{R}^n \quad (\nu_0 = \text{const} > 0)$$

genügen (vgl. M. Giaquinta [Giaquinta (1983)]). Später gelang es J. Moser in [Moser (1961)] unter Verwendung der sogenannten Harnackschen Ungleichung De Giorgis Resultat erneut zu beweisen. Mit einer Weiterführung der Methoden von De Giorgi wurden diese Resultate von O.A. Ladyzenskaya und N.N. Ural'ceva für eine recht allgemeine Klasse von nichtlinearen elliptischen partiellen Differentialgleichungen übertragen. Analoge Resultate sind auch für den parabolischen Fall bekannt (siehe [Ladyzenskaya and Ural'ceva (1968)]).

Bei der Untersuchung dieser Beweise muß man jedoch feststellen, daß die dort verwandten Methoden nur für den Fall einer Gleichung arbeiten. Somit sind auch alle weiteren Versuche, De Giorgis Resultat auf Systeme zu übertragen, in der darauffolgenden Zeit fehlgeschlagen. Hieraus resultierte die Motivation, nach Gegenbeispielen zu suchen, um zu klären, ob Regularität schwacher Lösungen elliptischer Systeme sich grundlegend von der elliptischer Gleichungen unterscheidet. Tatsächlich gelang es De Giorgi 1968, in [De Giorgi (1968)] das folgende Gegenbeispiel zu konstruieren: Die Funktion

$$u(x) \,=\, x|x|^{-\gamma} \qquad \gamma \,=\, \frac{n}{2}\Big\{1 - [(2n-2)^2 + 1]^{-\frac{1}{2}}\Big\} \quad (n \geq 3),$$

welche zu $H^1(B_1(0); \mathbb{R}^n)$ gehört, ist auf $B_1(0) \setminus \{0\}$ unbeschränkt und eine Lösung von

(0.3) $$\int_\Omega A_{ij}^{\alpha\beta}(x) D_\alpha u^j D_\alpha \varphi^i \,\mathrm{d}x \,=\, 0 \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n),$$

wobei

$$A_{ij}^{\alpha\beta}(x) \,=\, \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} + \left[(n-2)\delta_{\alpha i} + \frac{x_i x_\alpha}{|x|^2}\right]\left[(n-2)\delta_{\beta}j + n\frac{x_j x_\beta}{|x|^2}\right].$$ [1)]

Wie man leicht nachprüft, gilt $A_{ij}^{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$. Darüber hinaus gibt es Konstanten $0 < \nu_0 < M$, so daß

$$\nu_0|\xi|^2 \,\leq\, A_{ij}^{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha^i\xi_\beta^j \,\leq\, M|\xi|^2 \quad \text{ffa. } x \in \Omega, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Dieses Beispiel zeigt, daß man im allgemeinen nicht erwarten kann, daß schwache Lösungen linearer elliptischer Systeme mit beschränkten Koeffizienten Hölder-stetig sind. Das

[1)] Hierbei bezeichne $\delta_{\alpha\beta}$ daß Kroneckersymbol, das heißt: $\delta_{\alpha\beta} = 0$ falls $\alpha \neq \beta$, $\delta_{\alpha\beta} = 1$ falls $\alpha = \beta$.

Gleiche gilt auch für quasililineare Systeme, selbst dann, wenn die Koeffizienten glatt sind. Wir verweisen hierbei auf ein Beispiel von E. Giusti und M. Miranda [Giusti and Miranda (1968)] aus dem Jahre 1968. Seit dieser Zeit wurden von vielen Autoren eine Reihe von Gegenbeispielen für die verschiedensten Fälle konstruiert. Zum Beispiel gelang es J. Nečas, ein Gegenbeispiel für ein nichtlineares System zu konstruieren (siehe [Nečas (1975)]; [Giaquinta (1983)], S. 59).

Es fällt jedoch auf, daß bei den meisten Gegenbeispielen die Menge der Unstetigkeitspunkte der schwachen Lösung eine abgeschlossene Nullmenge bezüglich des Lebesgue-Maßes bildet. Hieraus ergab sich die Vermutung, daß bei Systemen partieller Differentialgleichungen diese Art von Regularität allgemein bewiesen werden kann, was zu dem Begriff der *Regularität fast überall* bzw. *partiellen Regularität* führte. C.B. Morrey bestätigte diese Vermutung in [Morrey (1968)], für schwache Lösungen quasilinearer Systeme. Hierbei nennt man eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ partiell Hölder-stetig (zum Exponenten $\mu \in (0,1]$), falls es eine abgeschlossene Teilmenge $\Sigma \subset \Omega$ (die sogenannte *Singulärmenge*) mit $\mathrm{mes}_n(\Sigma) = 0$ gibt, so daß

$$u \in C^{0,\mu}(\Omega \setminus \Sigma; \mathbb{R}^N).$$

Auf der Grundlage von Morreys Ausführungen entwickelte man zum Beweis der partiellen Hölder-Stetigkeit schwacher Lösungen quasilinearer elliptischer Systeme eine *indirekte Methode*, bekannt auch als *Blow-up-Technik*. Hierzu lieferte E. Giusti in [Giusti (1969)] einen Beweis sogar für entartete Systeme beliebiger Ordnung für den Fall $2 \leq p < n$. Der Fall $1 < p < 2$ wurde von L. Pepe in [Pepe (1971)] behandelt.

Ende der siebziger Jahre gelang es M. Giaquinta und G. Modica in [Giaquinta and Modica (1979a)] nach einer Idee von F.W. Gehring [Gehring (1973)], höhere Integrierbarkeit für den Gradienten schwacher Lösungen elliptischer Systeme zu beweisen. Darüber hinaus erhielten die Autoren eine L^p-Abschätzung, die ihrer Struktur nach der Hölderschen Ungleichung entgegengesetzt ist und entwickelten hiermit eine direkte Methode für den Beweis partieller Hölder-Stetigkeit schwacher Lösungen quasilinearer und nichtlinearer elliptischer Systeme (vgl. [Giaquinta and Modica (1979b)]). Diese Methode hat im Gegensatz zur indirekten Methode den Vorteil, daß sich die Hölder-Norm direkt aus den Voraussetzungen an die Koeffizienten abschätzen läßt.

Im Teil I der vorliegenden Arbeit untersuchen wir schwache Lösungen nichtlinearer elliptischer Systeme mit Entartung

$$(0.4) \qquad -\operatorname{div} A_i(x,u,\nabla u) \;=\; B_i(x,u,\nabla u) \quad \text{in} \quad \Omega \quad (i = 1,\ldots,N),$$

während wir uns im Teil II mit schwachen Lösungen parabolischer Systeme mit Entartung

$$(0.5) \qquad \frac{\partial u^i}{\partial t} - \operatorname{div} A_i(x,u,\nabla u) \;=\; B_i(x,u,\nabla u) \quad \text{in} \quad Q \quad (i = 1,\ldots,N)$$

beschäftigen.

Für den elliptischen Fall prägte S. Campanato den Begriff der *q-elliptischen Systeme* und bewies in [Campanato (1982)] im Fall des *kontrollierten Wachstums* die partielle Hölder-Stetigkeit schwacher $W^{1,q}$-Lösungen unter der Einschränkung $n \leq q+2$. Bisher offen geblieben ist sowohl der Fall $n > q+2$, als auch der Fall des natürlichen Wachstums $(1 < q < 2)$. Eine Anwort auf diese Fragen geben wir im 3. Kapitel unserer Arbeit, unter der Voraussetzung, daß der Stetigkeitsmodul ω der Koeffizienten A_i^α bezüglich $\{x, u\} \in \Omega \times \mathbb{R}^N$ der **Dini-Bedingung**

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t}\,\mathrm{d}t \;<\; +\infty \tag{0.6}$$

genügt. Bei diesen Betrachtungen geht es vorwiegend darum, die in Definition 3.1 beschriebenen strukturellen Voraussetzungen zu verifizieren, die garantieren, daß der Gradient einer schwachen Lösung des jeweiligen elliptischen Systems *partiell stetig* ist (vgl. Satz 3.1, Abschnitt 3.1). Für den Fall des kontrollierten Wachstums verwenden wir hierfür eine Methode, welche die direkte und die indirekte Methode miteinander verknüpft. Die grundlegenden Hilfsmittel und fundamentalen Abschätzungen werden im 1. Kapitel bereitgestellt, wobei die im Abschnitt 1.1 zitierte Verallgemeinerung der bekannten Campanato-Abschätzung bezüglich der L^q-Norm (vgl. [Wolf (1997)]) neu ist und eine entscheidende Rolle in den nachfolgenden Betrachtungen spielt.

Das Hauptanliegen des 2. Kapitels ist der Beweis eines Maximumprinzips für nichtlineare Systeme und liefert die Grundlage für den Beweis der partiellen Hölder-Stetigkeit für den Fall $n \leq 3$ bei natürlichem Wachstum.

Im 4. Kapitel untersuchen wir schwache Lösungen nichtlinearer Systeme mit stetig differenzierbaren Koeffizienten $A_i^\alpha(\xi)$ $(\xi \in \mathbb{R}^{nN})$ in den Fällen $n = 2, 3$ und erhalten dort $C^{1,\gamma}$-Regularität bzw. $C^{0,\gamma}$-Regularität. Darüber hinaus bilden die dort hergeleiteten a-priori-Abschätzungen eine wichtige Grundlage für das Studium schwacher Lösungen parabolischer Systeme bei zwei bzw. drei Raumdimensionen (siehe Teil II; 8. Kapitel).

Im 5. Kapitel stellen wir einige Resultate aus der Theorie abstrakter parabolischer Gleichungen bereit, die zum Teil aus der Literatur bekannt und zum Teil neu sind. Dort ist es uns gelungen, einen allgemeinen Existenzsatz für nichtlineare Evolutionsgleichungen zu beweisen (vgl. Abschnitt 5.3). Dieser findet beim Beweis der partiellen Regularität im Fall $n = 2$ seine Anwendung, ist aber auch von allgemeinem Interesse.

Im 6. Kapitel zeigen wir, unter geeigneten Voraussetzungen an die Koeffizienten und an die rechte Seite, die Existenz der schwachen Zeitableitung $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ in $L^2_{\mathrm{loc}}(Q; \mathbb{R}^N)$ und die Existenz der zweiten schwachen Ableitungen bezüglich der Ortsvariablen $x \in \Omega$ sowie die $H^{1/2}$-Differenzierbarkeit der schwachen Lösung. Im darauffolgenden Kapitel beweisen wir, ähnlich wie im elliptischen Fall, eine Verallgemeinerung der Campanato-Abschätzung für schwache Lösungen linearer parabolischer Systeme mit konstanten Koeffizienten. Diese Ungleichungen werden im 9. Kapitel, beim Beweis der partiellen Stetigkeit des Gradienten einer schwachen Lösung des nichtlinearen Systems (0.5), eine zentrale Rolle spielen. Genauso wie im elliptischen Fall setzen wir hierbei voraus, daß der Stetigkeitsmodul ω der Koeffitienten A_i^α der Dini-Bedingung (0.6) genügt.

Abschließend ist uns noch gelungen für den Spezialfall $n = 2$, partielle Hölder-Stetigkeit der schwachen Lösung zu zeigen, ohne vorauszusetzen, daß ω der Dini-Bedingung (0.6) genügt. Gleichzeitig sind wir in der Lage, das Hausdorff-Maß der Singulärmenge Σ genauer abzuschätzen. In diesem Sinne sind diese Resultate ein Analogon zu den bereits bekannten Resultaten bei q-elliptischen Systemen $(1 < q < 2)$ für entsprechende parabolische Systeme, womit die bisher offen gebliebene Frage nach der partiellen Regularität schwacher Lösungen auch für diesen Fall fast vollständig geklärt ist.

Teil I

Elliptische Systeme

Kapitel 1

L^q-Abschätzungen

1.1 Bezeichnungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N} \geq 2)$ ein beschränktes Gebiet mit Punkten $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Mit $|\cdot|_m$ bezeichnen wir die Euklidische Norm in $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 1)$, wobei wir den Index m weglassen, falls keine Verwechslungen möglich sind. Für $\alpha \in \{1, \ldots, n\}$ bezeichne D_α den Differentialoperator $\partial/\partial x_\alpha$.

$L^p(\Omega)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ bezeichne den Vektorraum aller (Klassen von) zur p-ten Potenz integrierbarer Lebesgue-meßbarer Funktionen $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ mit der Norm

$$\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_\Omega |\varphi(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} & \text{falls} \quad 1 \leq p < +\infty \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |\varphi(x)| & \text{falls} \quad p = +\infty. \end{cases}$$

$W^{m,p}(\Omega)$ (bzw. $W^{m,p}_\circ(\Omega)$) $(1 \leq p \leq +\infty, m = 1, 2, \ldots)$ bezeichnen die üblichen Sobolev-Räume, ausgestattet mit der folgenden Norm

$$\|\varphi\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \varphi\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}. \text{ [1)]}$$

Insbesondere setzen wir $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$ (bzw. $H^m_\circ(\Omega) := W^{m,2}_\circ(\Omega)$) $(m \in \mathbb{N})$. Ferner definiert der Ausdruck

$$(\varphi, \psi)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha \varphi D^\alpha \psi \, \mathrm{d}x \quad (\varphi, \psi \in H^m(\Omega))$$

[1)] Für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ bezeichne D^α den Differentialoperator $D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$ und $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ die Länge von α.

ein Skalarprodukt, womit dieser Raum zu einem Hilbert-Raum wird.

$W^{\theta,p}(\Omega)\,(1 \leq p < +\infty, 0 < \theta < 1)$ bezeichnen die üblichen Sobolev-Slobodetskij-Räume, bestehend aus allen $\varphi \in L^p(\Omega)$, so daß

$$|\varphi|_{W^{\theta,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^p}{|x-y|^{n+p\theta}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \right)^{1/p} < +\infty.$$

$W^{m+\theta,p}(\Omega)$ $(1 \leq p < +\infty, 0 < \theta < 1)\,(m \in \mathbb{N})$ bezeichne den Funktionenraum aller $\varphi \in W^{m,p}(\Omega)$, so daß $D^\alpha \varphi \in W^{\theta,p}(\Omega)\ \forall\, |\alpha| = m$. Überdies definiert der Ausdruck

$$\|\varphi\|_{W^{m+\theta,p}(\Omega)} = \Big(\|\varphi\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha \varphi|^p_{W^{\theta,p}(\Omega)} \Big)^{1/p}$$

eine Norm, womit $W^{m+\theta,p}(\Omega)$ zu einem Banach-Raum wird. Insbesondere setzen wir

$$H^{m+\theta}(\Omega) := W^{m+\theta,2}(\Omega)$$

und definieren das Skalarprodukt

$$\begin{aligned}(\varphi,\psi)_{H^{m+\theta}} &= (\varphi,\psi)_{H^m} + \\ &+ \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \int_\Omega \frac{(D^\alpha\varphi(x) - D^\alpha\varphi(y))(D^\alpha\psi(x) - D^\alpha\psi(y))}{|x-y|^{n+p\theta}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,\end{aligned}$$

womit der Raum $H^{m+\theta}(\Omega)$ ebenfalls zu einem Hilbert-Raum wird.

Seien $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $0 < r < +\infty$. Wir setzen

$$B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < R\}.$$

Falls keine Verwechslungen auftreten können, schreiben wir kürzer B_r anstelle von $B_r(x_0)$.

$L^{p,\lambda}(\Omega)$ $(1 \leq p < +\infty, \lambda \in [0,n])$ bezeichne den Morrey-Raum, bestehend aus allen $\varphi \in L^p(\Omega)$, so daß

$$\|\varphi\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} := \left(\sup_{\substack{0<r\leq \operatorname{diam}(Q) \\ x_0 \in Q}} \left\{ r^{-\lambda} \int_{B_r(x_0)\cap\Omega} |\varphi|^p \, \mathrm{d}x \right\} \right)^{1/p} < +\infty.$$

$\mathfrak{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ $(1 \leq p < +\infty, 0 \leq \lambda < +\infty)$ bezeichne den Campanato-Raum aller $\varphi \in L^p(\Omega)$, so daß

$$[\varphi]_{\mathfrak{L}^{p,\lambda}(\Omega)} := \left(\sup_{\substack{0<r\leq \mathrm{diam}(Q)\\ x_0\in Q}} \left\{ r^{-\lambda} \fint_{B_r(x_0)\cap\Omega} |\varphi - \varphi_{B_r(x_0)\cap\Omega}|^p \,\mathrm{d}x \right\} \right)^{1/p} < +\infty, \text{ [2)]}$$

Darüber hinaus definiert der Ausdruck

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{L}^{p,\lambda}(\Omega)} = \left(\|\varphi\|^p_{L^p(\Omega)} + [\varphi]^p_{\mathfrak{L}^{p,\lambda}(\Omega)} \right)^{1/p}$$

eine Norm auf $\mathfrak{L}^{p,\lambda}(\Omega)$. Sowohl $L^{p,\lambda}(\Omega)$ als auch $\mathfrak{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ sind bekanntlich Banach-Räume.

Definition 1.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Dann heißt Ω* **regulär**, *falls es eine reelle Zahl $\delta_0 > 0$ gibt, so daß*

$$\mathrm{mes}(B_r \cap \Omega) \geq \delta_0 r^n \quad \forall\, x_0 \in \Omega,\ \forall\, 0 < r < \mathrm{diam}(\Omega). \qquad \blacksquare$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine reguläre offene Menge und sei $1 \leq p < +\infty$. Die folgenden Aussagen sind aus der Literatur gut bekannt (vgl. [Campanato (1963), Giaquinta (1983), Kufner et al. (1977)]):

(i) $L^{p,\lambda}(\Omega) \cong \mathfrak{L}^{p,\lambda}(\Omega) \qquad \forall\, \lambda \in [0, n)$

(ii) $\mathfrak{L}^{p,\lambda}(\Omega) \cong C^{0,(\lambda-n)/p}(\Omega)\ \forall\, \lambda \in (n, n+p]$ [3)]

(iii) $L^{p,n}(\Omega) \cong L^\infty(\Omega)$

(iv) $\mathfrak{L}^{p,n}(\Omega) \cong \mathfrak{L}^{1,n}(\Omega)$.

Zusätzlich definieren wir den sogenannten Morrey-Campanato-Raum durch

$$W^{1,p(\mu)}(\Omega) = \{ u \in W^{1,p}(\Omega) \mid D_\alpha u \in L^{p,n}(\Omega)\ (\alpha = 1, \ldots, n) \}$$

$(1 \leq p < +\infty; 0 < \mu \leq n)$.

Sei $N \in \mathbb{N} \geq 1$. Dann bezeichnen $L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$, $W^{m,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$, $H^m(\Omega; \mathbb{R}^N)$, usw. die Räume vektorwertiger Funktionen $[L^p(\Omega)]^N$, $[W^{m,p}(\Omega)]^N$, $[H^m(\Omega)]^N$, usw.

[2)] Für eine meßbare Teilmenge $A \subset \Omega$ bezeichne φ_A den Mittelwert $\fint_A \varphi \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{mes}(A)} \int_A \varphi \,\mathrm{d}x$.

[3)] Hier bezeichne $C^{0,\mu}(\overline{\Omega})$ $(\mu \in (0,1])$ die Menge der Hölder-stetigen Funktionen φ, für die gilt:

$$[\varphi]_{C^{0,\mu}(\overline{\Omega})} = \sup_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x-y|^\mu} < +\infty.$$

1.2 Lineare und quasilineare Systeme

Eine wichtige Rolle beim Beweis der Hölder-Stetigkeit bzw. partiellen Hölder-Stetigkeit schwacher Lösungen elliptischer Systeme spielen die sogenannten Caccioppoli-Ungleichungen und fundamentalen Abschätzungen, die man zunächst im Fall linearer Systeme mit konstanten Koeffizienten herleitet (vgl. [Campanato (1965), Giaquinta (1983)]). Weiter unten untersuchen wir schwache Lösungen quasilinearer Systeme aus der Klasse $\mathcal{H}^{1,q}(\Omega)$ $(1 < q < 2)$ (vgl. Pepe [Pepe (1971)], Giusti [Giusti (1969)]) und beweisen hierfür geeignete Caccioppoli-Ungleichungen, die eine Verallgemeinerung der bereits bekannten Caccioppoli-Ungleichung bezüglich der L^2-Norm darstellen.

Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Sei $N \geq 1$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir betrachten das folgende System partieller Differentialgleichungen:

$$(1.1) \qquad D_\alpha\Big(A^{\alpha\beta}_{ij(*)} D_\beta u^j\Big) = 0 \text{ [4]} \qquad \text{in} \quad \Omega \qquad (i = 1, \dots, N),$$

wobei die Koeffizienten $A^{\alpha\beta}_{ij(*)}$ $(\alpha, \beta = 1, \dots, n; i, j = 1, \dots, N)$ Konstanten bezeichnen, die den folgenden Bedingungen genügen:

$$(1.2) \qquad A^{\alpha\beta}_{ij(*)}\xi^i_\alpha \xi^j_\beta \;\geq\; \nu_0|\xi|^2 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^{nN} \quad (\nu_0 = \text{const} > 0);$$

$$(1.3) \qquad \sum_{i,j=1}^{N} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} |A^{\alpha\beta}_{ij(*)}| \;\leq\; c_0 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^{nN} \quad (c_0 = \text{const}).$$

In [Campanato (1965)] wurde gezeigt, daß es eine positive Konstante $c = c(c_0/\nu_0, n, N)$ mit der Eigenschaft gibt, daß für jede schwache Lösung $u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$ des Systems (1.1) die folgende fundamentale Abschätzung für beliebige Paare konzentrischer Kugeln $B_\sigma \subset\subset B_R \subset \Omega$ [5] gültig ist:

$$(1.4) \qquad \int_{B_\sigma} |u - u_{B_\sigma}|^2 \, \mathrm{d}x \;\leq\; c \left(\frac{\sigma}{R}\right)^{n+2} \int_{B_R} |u - u_{B_R}|^2 \, \mathrm{d}x.$$

[4] In den folgenden Betrachtungen implizieren doppelt auftretende griechische Buchstaben (bzw. lateinische Buchstaben) Summation von 1 bis n (bzw. von 1 bis N).

[5] $\Omega' \subset\subset \Omega$ bedeutet: Ω' ist ein Gebiet und $\overline{\Omega'}$ ist eine kompakte Teilmenge von Ω.

Die Abschätzung (1.4) erhält man mit Hilfe des Sobolevschen Einbettungssatzes und der Poincaré-Ungleichung aus der nachstehenden Caccioppoli-Ungleichung

$$(1.5)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{B_\sigma} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x \le \frac{c}{(R-\sigma)^2} \int_{B_R} |u|^2 \,\mathrm{d}x \\ \forall\, x_0 \in \Omega,\ \forall\, 0 < \sigma < R < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega), \text{ [6)]} \end{cases}$$

wobei $c = \text{const} > 0$ nur von $c_0/\nu_0, n$ und N abhängt.

Da bei der Untersuchung schwacher Lösungen *q-elliptischer Systeme* $(1 < q < 2)$ (vgl. Campanato [Campanato (1982)]) die Abschätzung (1.4) nicht direkt anwendbar ist, erscheint es für die weiteren Betrachtungen notwendig, eine entsprechende Verallgemeinerung bezüglich der L^q-Norm $(1 < q < 2)$ herzuleiten. Tatsächlich ist es uns gelungen, unter Verwendung einer elementaren Interpolationsungleichung (vgl. Lemma A.1; Lemma A.2) solche Abschätzungen aus der bekannten Caccioppoli-Ungleichung (1.5) herzuleiten. Hierzu das folgende

Lemma 1.1 *Seien die Bedingungen* (1.2) *und* (1.3) *erfüllt. Sei $1 < q < 2$ beliebig vorgegeben. Dann existiert eine positive Konstante $c = c(c_0/\nu_0, q, n, N)$, so daß für jede schwache Lösung $u \in W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ von* (1.1) *die folgende verallgemeinerte Caccioppoli-Ungleichung für beliebige Paare konzentrischer Kugeln $B_\sigma \subset\subset B_R \subset \Omega$ erfüllt ist:*

$$(1.6)\qquad \int_{B_\sigma} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x \le c \left(\frac{R}{R-\sigma}\right)^{qn} R^{-q} \int_{B_R} |u|^q \,\mathrm{d}x.$$

■

Aus (1.6) folgt nun mit Hilfe einer analogen Argumentation wie im Beweis für die fundamentale Abschätzung (1.4) die folgende Verallgemeinerung dieser Abschätzung bezüglich der L^q-Norm.

Satz 1.1 *Seien* (1.2) *und* (1.3) *erfüllt. Dann gibt es eine positive Konstante A, welche nur von $c_0/\nu_0, q, n$ und N abhängt, mit der Eigenschaft, daß für jede schwache Lösung $u \in W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ des Systems* (1.1) *die folgende Abschätzung für beliebige konzentrische Kugeln $B_\sigma \subset\subset B_R \subset \Omega$ gültig ist:*

$$(1.7)\qquad \int_{B_\sigma} |u - u_{B_\sigma}|^q \,\mathrm{d}x \le A^q \left(\frac{\sigma}{R}\right)^{n+q} \int_{B_R} |u - u_{B_R}|^q \,\mathrm{d}x.$$

(Die vollständigen Beweise von Lemma 1.1 und Satz 1.1 findet man in [Wolf (1997)].) ■

[6)] Hier bezeichne ∇u die Gradientenmatrix $\{D_\alpha u^i \mid \alpha = 1, \ldots, n; i = 1, \ldots, N\}$.

Quasilineare Systeme

Als nächstes betrachten wir ein quasilineares System partieller Differentialgleichungen der folgenden Gestalt:

$$(1.8)\qquad D_\alpha\Big(A_{ij}^{\alpha\beta}(x,u)D_\beta u^j\Big) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \qquad (i=1,\dots,N).$$

Hierbei bezeichnen $A_{ij}^{\alpha\beta} : \Omega\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ $(\alpha,\beta=1,\dots,n; i,j=1,\dots,N)$ stetige Funktionen, welche außerdem der folgenden Bedingung genügen mögen:

$$(1.9)\qquad \begin{cases} A_{ij}^{\alpha\beta}(x,u)\xi_\alpha^i\xi_\beta^j \ \geq\ \nu_0 V^{q-2}|\xi|^2, \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} |A_{ij}^{\alpha\beta}(x,u)| \ \leq\ c_0 V^{q-2} \\ \forall\,\{x,u\}\in\Omega\times\mathbb{R}^N,\ \forall\,\xi\in\mathbb{R}^{nN} \quad (\nu_0, c_0 = \text{const} > 0; 1<q<2), \end{cases}$$

wobei $V = V(u) = (1+|u|^2)^{1/2}$ $(u\in\mathbb{R}^N)$.

Nun definieren wir

$$\mathcal{H}^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N) := \Big\{u\in W^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)\ \Big|\ V^{(q-2)/2}D_\alpha u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^N)\ (\alpha=1,\dots,n)\Big\}.$$

Definition 1.2 *Eine Funktion $u\in\mathcal{H}^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ heißt* **schwache Lösung des Systems** (1.8), *falls für beliebige $\varphi\in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$* [7] *gilt*:

$$(1.10)\qquad \int_\Omega A_{ij}^{\alpha\beta}(x,u)D_\beta u^j D_\alpha\varphi^i\,\mathrm{d}x \ =\ 0.$$

■

Verwendet man in (1.10) Testfunktionen der Gestalt $\varphi = u\zeta^2$ [8], wobei $\zeta\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine geeignete *Schnittfunktion* bezeichne, so erhält man die folgenden bekannten Caccioppoli-Ungleichungen (vgl. auch E. Giusti [Giusti (1969)] für Systeme beliebiger Ordnung).

[7] Sei $m\in\mathbb{N}$ oder $m=+\infty$. Dann bezeichne $C_c^m(\Omega)$ die Menge aller Funktionen $\varphi\in C^m(\Omega)$, deren Träger kompakt ist. Dann ist $C_c^m(\Omega)$ ein Teilraum von $C^m(\overline{\Omega})$.

[8] Mit Hilfe der üblichen Mittelfunktionen, zeigt man, daß jede Funktion $\varphi\in H^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$ mit $\operatorname{supp}(\varphi)\subset\Omega$ für (1.10) zulässig ist. Beachtet man $u\in\mathcal{H}^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$, so ist für ein beliebiges $\varepsilon>0$ und $\zeta\in C_c^\infty(\Omega)$ die Funktion $v_\varepsilon := (1+\varepsilon|u|^2)^{(q-2)/4}u\zeta^2 \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$, was man sich unter Benutzung der Produkt- und Kettenregel klarmacht. Also ist v_ε ebenfalls für (1.10) zulässig. Wegen $D_\alpha v_\varepsilon \to D_\alpha(u\zeta^2)$ fast überall in Ω für $\varepsilon\to 0$ und

$$|A_{ij}^{\alpha\beta}(x,u)D_\beta u^j D_\alpha v_\varepsilon^i| \ \leq\ c\,|\zeta|\Big((1+|u|^{q-1})|\nabla u||\nabla\zeta| \ +\ (1+|u|^2)^{(q-2)/2}|\nabla u|^2\Big) \quad \text{f.ü. in} \quad \Omega$$

$(\alpha,\beta=1,\dots,n; i,j=1,\dots,N)$ erkennt man mit Hilfe des Satzes von Lebesgue nach Ausführung des Grenzüberganges $\varepsilon\to 0$, daß auch $u\zeta^2$ für (1.10) zulässig ist.

Lemma 1.2 *Seien* $A_{ij}^{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, n; i, j = 1, \ldots, N)$ *Koeffizienten, die der Bedingung* (1.9) *genügen. Sei* $u \in \mathcal{H}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ *eine schwache Lösung von* (1.8). *Dann gilt für beliebige Paare konzentrischer Kugeln* $B_\sigma \subset\subset B_R \subset \Omega$ *und für jedes* $a \in \mathbb{R}^N$

$$\int_{B_\sigma} V^{q-2} |\nabla u|^2 \, dx \leq \frac{c}{(R-\sigma)^2} \int_{B_R} V^{q-2} |u-a|^2 \, dx, \tag{1.11}$$

wobei $c = \text{const} > 0$ *eine positive Konstante bezeichne, die nur von* $c_0/\nu_0, n$ *und* N *abhängt.* ∎

Nun sind wir in der Lage, ausgehend von (1.11) eine geeignete *umgekehrte Hölder-Ungleichung* zu beweisen. Diese Ungleichung werden wir im nächsten Abschnitt benötigen, wenn es darum geht, mit Hilfe der indirekten Methode fundamentale Abschätzungen herzuleiten.

Lemma 1.3 *Sei* $u \in \mathcal{H}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ *eine schwache Lösung des Systems* (1.8). *Ferner sei die Bedingung* (1.9) *erfüllt. Sei* $0 < M < +\infty$ *eine beliebige, aber fixierte Zahl. Dann gibt es eine positive Konstante* K_*, *die nur von* $c_0/\nu_0, q, n, N$ *und* M *abhängt, derart, daß für jedes* $a \in [-M, M]^N$, *für jedes* $x_0 \in \Omega$ *und für alle* $0 < R < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ *die folgende Ungleichung gültig ist*:

$$\left(\int_{B_\sigma} V^{q-2} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2} \leq K_* \left(\frac{R}{R-\sigma} \right)^n R^{n(1/2-1/q)-1} \left(\int_{B_R} |u-a|^q \, dx \right)^{1/q}. \tag{1.12}$$

Beweis. - Seien $x_0 \in \Omega$ und $0 < \sigma < R < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$, $a \in [-M, M]^N$ beliebig fixiert. Wir setzen

$$v^i(x) := V^{(q-2)/2}(x)(u^i(x) - a^i) \qquad (x \in B_R;\ i = 1, \ldots, N).$$

Wie man leicht sieht, ist $v \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$. In der Tat, benutzt man die Produkt- und Kettenregel, so findet man mit einer elementaren Rechnung

$$D_\alpha v^i = V^{(q-2)/2} D_\alpha u^i - \frac{2-q}{2} V^{(q-6)/2} u^j D_\alpha u^j (u^i - a^i) \quad \text{f.ü. in } B_R$$

$(\alpha = 1, \ldots, n; i = 1, \ldots, N)$. Wegen $u \in \mathcal{H}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ folgt hieraus $\nabla v \in L^2(B_R; \mathbb{R}^{nN})$.

Nun seien $\sigma \leq \sigma_1 < \sigma_2 \leq R$ beliebig gewählt. Die Ungleichung (1.11) liefert dann

$$\int_{B_{\sigma_1}} |\nabla v|^2 \, dx \leq \frac{c}{(\sigma_2 - \sigma_1)^2} \int_{B_{\sigma_2}} |v|^2 \, dx. \tag{1.13}$$

Die rechte Seite von (1.13) schätzen wir unter Verwendung von Lemma A.2 nach oben ab, indem wir dort $\varepsilon = \dfrac{(\sigma_2-\sigma_1)^2}{2cR^2}$ wählen. Hieraus schließen wir

$$\int_{B_{\sigma_1}} |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x \le c \left(\frac{R}{\sigma_2-\sigma_1}\right)^{2n} R^{n(1-2/q)-2} \Bigg(\int_{B_{\sigma_2}} |v|^q \,\mathrm{d}x \Bigg)^{2/q} + \frac{1}{2} \int_{B_{\sigma_2}} |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x,$$

wobei die Konstante c nur von $c_0/\nu_0, q, n, N$ und M abhängt. Die Behauptung ergibt sich nun unmittelbar nach Anwendung von Lemma A.3. ∎

1.3 Der Fall $A_i^\alpha(\xi)$

Nun betrachten wir das folgende nichtlineare System partieller Differentialgleichungen:

$$D_\alpha A_i^\alpha(\nabla u) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \qquad (i = 1, \ldots, N), \tag{1.14}$$

wobei die Koeffizienten $A_i^\alpha(\xi) : \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}\,(\alpha = 1, \ldots, n; i = 1, \ldots, N)$ stetig differenzierbar seien und den folgenden Bedingungen genügen mögen:

$$\left| \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial \xi_\beta^j}(\xi) \right| \le c_0(1+|\xi|)^{q-2} \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^{nN} \quad (c_0 = \text{const}) \tag{1.15}$$

$(\alpha, \beta = 1, \ldots, n; i, j = 1, \ldots, N)$;

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A_i^\alpha}{\partial \xi_\beta^j}(\xi)\eta_\alpha^i \eta_\beta^j \ge \nu_0(1+|\xi|)^{q-2}|\eta|^2 \\ \forall\, \xi, \eta \in \mathbb{R}^{nN} \quad (\nu_0 = \text{const} > 0). \end{cases} \tag{1.16}$$

Definition 1.3 *Sei (1.15) erfüllt. Eine Funktion $u \in W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ heißt* **schwache Lösung von** (1.14)*, falls*

$$\int_\Omega A_i^\alpha(\nabla u) D_\alpha \varphi \,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^N). \tag{1.17}$$

∎

Lokale $W^{2,q}$-Differenzierbarkeit

Mit Hilfe der bekannten Methode des Differenzenquotienten erhält man das folgende Resultat lokaler Differenzierbarkeit (vgl. [Naumann (1990), Naumann and Wolf (1992)]).

Lemma 1.4 *Seien die Bedingungen* (1.15) *und* (1.16) *erfüllt. Ist* $u \in W^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ *eine schwache Lösung des Systems* (1.14), *dann gilt:*

$$(1.18) \qquad (1+|\nabla u|)^{(q-2)/2} D_\alpha D_\beta u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^N) \qquad (\alpha,\beta = 1,\dots,n).$$

Außerdem haben wir für beliebige $x_0 \in \Omega$, $0<\sigma<R\le \operatorname{dist}(x_0,\partial\Omega)$ *und für jedes* $\Lambda \in \mathbb{R}^{nN}$:

$$(1.19) \qquad \int_{B_\sigma} (1+|\nabla u|)^{q-2}|D^2u|^2\,\mathrm{d}x \le \frac{c}{(R-\sigma)^2}\int_{B_R}(1+|\nabla u|)^{q-2}|\nabla u-\Lambda|^2\,\mathrm{d}x, \text{ [9]}$$

wobei $c = \mathrm{const}$ *nur von* $c_0/\nu_0, q, n$ *und* N *abhängt.* ■

Anmerkung 1.1 Die Behauptung (1.18) von Lemma 1.4 bleibt auch dann noch gültig, falls die Koeffizienten A_i^α zusätzlich von $x \in \Omega$ [10] abhängen, stetig differenzierbar sind und außerdem den folgenden Bedingungen genügen

$$(1.20) \qquad \begin{cases} |A_i^\alpha(x,\xi)| + \left|\dfrac{\partial A_i^\alpha}{\partial x}(x,\xi)\right| \le c_1(1+|\xi|)^{q-1} \\ \forall\,\{x,\xi\} \in \Omega\times\mathbb{R}^{nN} \qquad (c_1 = \mathrm{const}); \end{cases}$$

$$(1.21) \qquad \left|\frac{\partial A_i^\alpha}{\partial \xi_\beta^j}(x,\xi)\right| \le c_0(1+|\xi|)^{q-2} \quad \forall\,\{x,\xi\}\in\Omega\times\mathbb{R}^{nN} \quad (c_0 = \mathrm{const});$$

$(\alpha,\beta = 1,\dots,n; i,j = 1,\dots,N)$;

$$(1.22) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial A_i^\alpha}{\partial \xi_\beta^j}(x,\xi)\eta_\alpha^i\eta_\beta^j \ge \nu_0(1+|\xi|)^{q-2}|\eta|^2 \\ \forall\, x\in\Omega,\ \forall\,\xi,\eta \in \mathbb{R}^{nN} \quad (\nu_0 = \mathrm{const} > 0). \end{cases}$$

Dann ist (1.19) (für $\Lambda = 0$) erfüllt, d.h. für beliebige $x_0 \in \Omega$ und $0<\sigma<R\le\operatorname{dist}(x_0,\partial\Omega)$:

$$(1.23) \qquad \int_{B_\sigma}(1+|\nabla u|)^{q-2}|D^2u|^2\,\mathrm{d}x \le \frac{c}{(R-\sigma)^2}\int_{B_R}(1+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x. \qquad ■$$

[9] Hier bezeichne D^2u die Matrix der zweiten Ableitungen von u.
[10] Die schwachen Lösungen seien wie in Definition 1.3 definiert.

Umgekehrte Hölder-Ungleichung

Aus (1.15) und (1.18) folgt mit Hilfe der Kettenregel

$$A_i^\alpha(\nabla u) \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \qquad (\alpha = 1, \ldots, n; i = 1, \ldots, N).$$

Setzt man in (1.17) für $\psi \in C^1_{\mathrm{c}}(\Omega; R^{\mathbb{N}})$ die Testfunktion $\varphi = D_\gamma \psi \, (\gamma \in \{1, \ldots, n\})$ ein, so folgt nach Anwendung partieller Integration

$$\text{(1.24)} \qquad \int_\Omega \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial \xi_\beta^j}(\nabla u) D_\beta D_\gamma u^j D_\alpha \psi^i \, \mathrm{d}x \; = \; 0 \quad \forall \, \psi \in C^1_{\mathrm{c}}(\Omega; \mathbb{R}^N).$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} U^{i\gamma}(x) &:= (D_\gamma u^i)(x) && (x \in \Omega), \\ A^{\alpha\beta}_{ij\gamma\theta}(U) &:= \delta_{\gamma\theta} \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial \xi_\beta^j}(U) && (U \in \mathbb{R}^{nN}) \text{ [11]} \end{aligned}$$

$(\alpha, \beta, \gamma, \theta = 1, \ldots, n; i, j = 1, \ldots, N)$.

Aus Lemma 1.4 folgt unmittelbar, daß $U \in \mathcal{H}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^{nN})$. Außerdem ist U eine schwache Lösung des folgenden quasilinearen Systems:

$$\text{(1.25)} \qquad D_\alpha\Big(A^{\alpha\beta}_{ij\gamma\theta}(U) D_\beta U^{j\theta}\Big) \; = \; 0 \quad \text{in} \quad \Omega \qquad (\gamma = 1, \ldots, n, i = 1, \ldots, N).$$

Wie sich außerdem herausstellt, genügen die Koeffizienten $\{A^{\alpha\beta}_{ij\gamma\theta}\}$ der Bedingung (1.9). Unter Benutzung von Lemma 1.3 ergibt sich nun die folgende Aussage.

Lemma 1.5 *Seien (1.15) und (1.16) erfüllt. Sei $0 < M < +\infty$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es eine positive Konstante $K_* = K_*(c_0/\nu_0, q, n, N, M)$, derart, daß für jede schwache Lösung $u \in W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ und für jedes $x_0 \in \Omega$, für alle $0 < R \leq \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$, für alle $\Lambda \in [-M, M]^{nN}$ und für jedes $\tau \in (0,1)$ die folgende Ungleichung erfüllt ist:*

$$\text{(1.26)} \qquad \left(\int_{B_{\tau R}} (1 + |\nabla u|)^{q-2} |D^2 u|^2 \, \mathrm{d}x\right)^{1/2} \leq \frac{K_* R^{n/2 - n/q - 1}}{(1-\tau)^n} \left(\int_{B_R} |\nabla u - \Lambda|^q \, \mathrm{d}x\right)^{1/q}. \; \blacksquare$$

[11] Hierbei bezeichne $\delta_{\gamma\theta}$ daß Kroneckersymbol: $\delta_{\gamma\theta} = 0$ falls $\gamma \neq \theta$, $\delta_{\gamma\theta} = 1$ falls $\gamma = \theta$.

Fundamentale Abschätzung. Die indirekte Methode

Um die Übersichtlichkeit zu wahren, führen wir die folgende Bezeichnung ein:
Sei $u \in W^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Für $x_0 \in \Omega$ und $0 < R < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ definieren wir

$$\Phi(u; x_0, R) \;=\; \left(\fint_{B_R(x_0)} |\nabla u - (\nabla u)_{B_R(x_0)}|^q \, \mathrm{d}x \right)^{1/q}.$$

Der nächste Satz liefert mit Hilfe der sogenannten indirekten Methode fundamentale Abschätzungen, die in dieser Form nur für den Spezialfall $q = 2$ bewiesen wurden (vgl. in [Giusti (1969), Giaquinta (1983)]). Diese Ungleichungen werden im Kapitel 3 beim Beweis der partiellen Hölder-Stetigkeit schwacher Lösungen nichtlinearer *q-elliptischer Systeme* $(1 < q < 2)$ für den Fall des kontrollierten Wachstums eine zentrale Rolle spielen.

Satz 1.2 *Sei $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^k$ abgeschlossen und sei $\{A_i^\alpha(\xi; z) \,|\, z \in \mathcal{Z}\ (\alpha = 1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, N)\}$ eine Familie auf $\mathbb{R}^{nN}$ definierter differenzierbarer Koeffizienten mit*

$$(1.27) \qquad \{\xi, z\} \mapsto \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial \xi_\beta^j}(\xi; z) \ \textit{stetig auf} \ \ \mathbb{R}^{nN} \times \mathcal{Z}.$$

Außerdem mögen für alle Koeffizienten $A_i^\alpha(\,\cdot\,; z)$ die Bedingungen (1.15) und (1.16) gleichmäßig bezüglich $z \in \mathcal{Z}$ erfüllt sein. Dann gibt es zu jedem $\tau \in (0,1)$ und $0 < M < +\infty$ eine positive Konstante $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\tau, M)$ mit folgender Eigenschaft:

Ist $u \in W^{1,q}(B_R;\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung des Systems

$$(1.28) \qquad D_\alpha A_i^\alpha(\nabla u; z) \;=\; 0 \quad \text{in} \quad B_R \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

$(z \in \mathcal{Z} \cap [-M, M]^k)$ und ist außerdem die Bedingung:

$$(1.29) \qquad \Phi(u; x_0, R) \;\le\; \varepsilon_0 \quad \textit{und} \quad |(\nabla u)_{B_R}| \;\le\; M$$

erfüllt, dann gilt die fundamentale Abschätzung:

$$(1.30) \qquad \Phi(u; x_0, \tau R) \;\le\; 2A\tau\Phi(u; x_0, R)\,^{12)}\,.$$

Beweis. - Wir führen den Beweis indirekt. Wir nehmen also an, es gibt Zahlen $\tau \in (0,1)$ und $0 < M < +\infty$, für welche die Aussage von Satz 1.2 falsch ist. Dann existieren:

1) eine Folge (x_m) von Punkten in Ω,

[12)] Hier bezeichne A die positive Konstante aus der fundamentalen Abschätzung (1.7).

2) eine Folge (R_m) positiver Zahlen $(0 < R_m < \operatorname{dist}(x_m, \partial\Omega))$,

3) eine Folge (ε_m) positiver Zahlen mit $\lim\limits_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0$,

4) eine Folge (z_m) von Punkten in $\mathcal{Z} \cap [-M, M]^k$,

5) eine Folge $(u_m) \subset W^{1,q}(B_{R_m}; \mathbb{R}^N)$ schwacher Lösungen des Systems:

$$D_\alpha A_i^\alpha(\nabla u_m; z_m) = 0 \quad \text{in} \quad B_{R_m}(x_m) \qquad (i = 1, \ldots, N), \tag{1.31}$$

so daß

$$\Phi(u_m; x_m, R_m) = \varepsilon_m \quad \text{und} \quad |(\nabla u_m)_{B_{R_m}}| \le M, \tag{1.32}$$

$$\Phi(u_m; x_m, \tau R_m) > 2A\tau\Phi(u_m; x_m, R_m) \tag{1.33}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$.

Nun setzen wir

$$\begin{aligned}
\lambda_m &:= (\nabla u_m)_{B_{R_m}}, \\
v_m(y) &:= \frac{u_m(x_m + R_m y) - (u_m)_{B_{R_m}} - R_m \lambda_m \cdot y}{\varepsilon_m R_m}, \\
A_{ij(m)}^{\alpha\beta}(y) &:= \int_0^1 \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial \xi_\beta^j}(t\varepsilon_m \nabla v_m(y) + \lambda_m; z_m)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

für fast alle $y \in B_1$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, n; i, j = 1, \ldots, N)$ $(m \in \mathbb{N})$.

Aus (1.32) und (1.33) erhält man unter Verwendung der Koordinatentransformation $y = (x - x_m)/R_m$ und Anwendung der Transformationsformel für das Lebesgue-Integral, daß $v_m \in W^{1,q}(B_1;\, \mathbb{R}^N)$ und

$$\Phi(v_m; 0, 1) = 1, \tag{1.34}$$

$$\Phi(v_m; 0, \tau) > 2A\tau\Phi(v_m; 0, 1) = 2A\tau \tag{1.35}$$

$(m \in \mathbb{N})$. Ferner folgt aus (1.31) unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung zusammen mit der Transformationsformel, daß die Funktionen v_m der folgenden Integralidentität genügen:

$$\int_{B_1} A_{ij(m)}^{\alpha\beta} D_\beta v_m^j D_\alpha \varphi^i \,\mathrm{d}y = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_c^1(B_1; \mathbb{R}^N). \tag{1.36}$$

Nach Voraussetzung sind die Folgen (λ_m) und (z_m) in den jeweiligen endlichdimensionalen Räumen beschränkt. Indem wir ggf. zu einer Teilfolge übergehen, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\lambda_* \in \mathbb{R}^{nN}$ und $z_* \in \mathcal{Z}$ existieren, so daß

$$(1.37) \qquad z_m \to z_* \quad \text{in} \quad \mathcal{Z}, \quad \lambda_m \to \lambda_* \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^{nN} \quad \text{für} \quad m \to +\infty.$$

Wegen $(v_m)_{B_1} = 0$ impliziert (1.34), daß (v_m) eine in $W^{1,q}(B_1;\mathbb{R}^N)$ beschränkte Folge ist. Aufgrund der Kompaktheit der Einbettung $W^{1,q}(B_1;\mathbb{R}^N) \subset L^q(B_1;\mathbb{R}^N)$ und der Reflexivität von $L^q(B_1;\mathbb{R}^N)$ erhält man, indem man ggf. zu einer Teilfolge übergeht,

$$(1.38) \qquad v_m \to v \qquad \text{in } L^q(B_1;\mathbb{R}^N),$$

$$(1.39) \qquad \nabla v_m \rightharpoonup \nabla v \qquad \text{in } L^q(B_1;\mathbb{R}^{nN}),$$

$$(1.40) \qquad \varepsilon_m \nabla v_m(y) \to 0 \qquad \text{ffa. } y \in B_1$$

für $m \to +\infty$.

Beachtet man (1.27), so folgt aus (1.37) und (1.40)

$$(1.41) \qquad A^{\alpha\beta}_{ij(m)}(y, z_m) \to A^{\alpha\beta}_{ij(*)} := \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial \xi_\beta^j}(\lambda_*; z_*) \quad \text{ffa. } y \in B_1 \quad \text{für} \quad m \to +\infty$$

$(\alpha, \beta = 1, \dots, n;\ i, j = 1, \dots, N)$. Da außerdem die Folge $(\mathbf{A}_{(m)})$ gleichmäßig beschränkt ist, folgern wir aus (1.41)

$$(1.42) \qquad \mathbf{A}_{(m)} \to \mathbf{A}_{(*)} \quad \text{in } L^{q'}(B_1;\mathbb{R}^{n^2N^2}) \quad \text{für} \quad m \to +\infty.$$ [13)]

Nun kann man unter Verwendung von (1.39) und (1.42) in (1.36) den Grenzübergang $m \to +\infty$ ausführen. Dies liefert die Integralidentität

$$(1.43) \qquad \int_{B_1} A^{\alpha\beta}_{ij(*)} D_\beta v^j D_\alpha \varphi^i \, \mathrm{d}y \;=\; 0 \quad \forall\, \varphi \in C^1_{\mathrm{c}}(B_1;\mathbb{R}^N).$$

Somit folgt nach Satz 1.1 die fundamentale Abschätzung

$$(1.44) \qquad \Phi(v; 0, \tau) \;\le\; A\tau\Phi(v; 0, 1).$$

Außerdem finden wir

$$(1.45) \qquad \Phi(v_m; 0, \tau) \to \Phi(v; 0, \tau) \quad \text{für} \quad m \to +\infty.$$

[13)] Hier bezeichne $\mathbf{A}_{(m)}$ (bzw. $\mathbf{A}_*$) die Koeffizientenmatrix $\{A^{\alpha\beta}_{ij(m)}\}$ $(m \in \mathbb{N})$ (bzw. $\{A^{\alpha\beta}_{ij(*)}\}$).

In der Tat, unter Verwendung von Lemma 1.5 verifiziert man

$$\left(\frac{1}{R^n}\int_{B_{\tau R_m}}(1+|\nabla u_m|)^{q-2}|D^2u_m|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \le$$

$$\le \frac{K_*}{R(1-\tau)^n}\left(\frac{1}{R^n}\int_{B_{R_m}}|\nabla u_m-\lambda_m|^q\,\mathrm{d}x\right)^{1/q},$$

was nach Anwendung der Transformationsformel für das Lebesgue-Integral und der Hölderschen Ungleichung die folgende Abschätzung nach sich zieht:

$$\left(\int_{B_\tau}|D^2v_m|^q\,\mathrm{d}y\right)^{1/q} \le$$

$$\le \frac{K_*}{(1-\tau)^{2^n}}\left(\int_{B_1}(1+|\varepsilon_m\nabla v_m+\lambda_m|^q)\,\mathrm{d}y\right)^{1/q-1/2}\Phi(v_m;0,1) \le C \tag{1.46}$$

mit einer von $m\in\mathbb{N}$ unabhängigen Konstante C. Die Folge (v_m) ist also in $W^{2,q}(B_\tau;\mathbb{R}^N)$ beschränkt. Da die Einbettung

$$W^{2,q}(B_\tau;\mathbb{R}^N)\subset W^{1,q}(B_\tau;\mathbb{R}^N)$$

kompakt ist, ergibt sich nun die Konvergenzeigenschaft (1.45). [14)]

Berücksichtigt man die Unterhalbstetigkeit der Norm und benutzt man (1.45), so folgt aus (1.35) nach Ausführung des Grenzüberganges $m\to+\infty$

$$\Phi(v;0,\tau) \ge 2A\tau\Phi(v;0,1),$$

was wegen (1.35) im Widerspruch zu (1.44) steht. Somit muß unsere Annahme falsch sein, was zeigt, daß die Behauptung des Satzes richtig ist. ■

1.4 Lokale $L^{q,\mu}$-Abschätzung

In diesem Abschnitt untersuchen wir schwache Lösungen eines nichtlinearen Systems der folgenden Gestalt:

[14)] Man beachte, daß die Folge (v_m) in $W^{1,q}(B_1;\mathbb{R}^N)$ wegen (1.39) nur einen einzigen Häufungspunkt besitzt.

$$D_\alpha A_i^\alpha(x,\nabla u) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \qquad (i=1,\dots,N), \tag{1.47}$$

wobei $A_i^\alpha(x,\xi) : \Omega \times \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}$ $(\alpha = 1,\dots,n; i = 1,\dots,N)$ stetig differenzierbare Funktionen seien und außerdem den Bedingungen (1.20)−(1.22) genügen.

Fundamentale Abschätzungen

Wir beginnen mit einer in der Literatur gut bekannten Caccioppoli-Ungleichung (siehe z.B. [Campanato (1978)]).

Lemma 1.6 *Sei $u \in W^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ $(1 < q < 2)$ eine schwache Lösung des Systems* (1.47). *Seien* (1.20)−(1.22) *erfüllt. Dann gilt für beliebige Paare konzentrischer Kugeln $B_{R/2} \subset B_R \subset \Omega$:*

$$\int_{B_{R/2}} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x \le c\,R^{-q} \int_{B_R} (R^q + |u|^q)\,\mathrm{d}x. \tag{1.48}$$

Hierbei ist $c = \text{const} > 0$ und hängt nur von $c_0/\nu_0, c_1, q, n$ und N ab.

Beweis. - Sei $u \in W^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung von (1.47). Dann genügt u der Integralidentität

$$\int_\Omega A_i^\alpha(x,\nabla u) D_\alpha \varphi^i \,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_c^1(\Omega;\mathbb{R}^N). \tag{1.49}$$

Hieraus schließt man unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \Big(A_{ij}^{\alpha\beta}(x,\nabla u) D_\beta^j u + A_i^\alpha(x,0)\Big) D_\alpha \varphi^i \,\mathrm{d}x = 0 \\ \forall\, \varphi \in C_c^1(\Omega;\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{1.50}$$

wobei

$$A_{ij}^{\alpha\beta}(x,\xi) := \int_0^1 \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial \xi_j^\beta}(x,t\xi)\,\mathrm{d}t \quad (\{x,\xi\} \in \Omega \times \mathbb{R}^{nN}).$$

Seien $x_0 \in \Omega$, $0 < R < \operatorname{dist}(x_0,\partial\Omega)$ beliebig, aber fixiert. Sei $\zeta \in C_c^\infty(B_R)$ eine Schnittfunktion, so daß $0 \le \zeta \le 1$ in B_R, $\zeta \equiv 1$ auf $B_{R/2}$ und $|\nabla\zeta| \le c(n)/R$ $(c(n) = \text{const} > 0)$. In (1.50) setzen wir die zulässige Testfunktion $\varphi(x) = u(x)\zeta^2(x)$ $(x \in B_R)$ ein. Hieraus ergibt sich unter Beachtung von (1.22)

$$
\begin{aligned}
\nu_0 \int_{B_R} |\nabla u|^q \zeta^2 \, \mathrm{d}x \;\le\; c \int_{B_R} \zeta^2 \, \mathrm{d}x \;-\; 2 \int_{B_R} A_{ij}^{\alpha\beta}(D_\beta u^j) u^i (D_\alpha \zeta) \zeta \, \mathrm{d}x \,- \\
(1.51) \qquad - \int_{B_R} A_i^\alpha(x,0)((D_\alpha u^i)\zeta^2 \;+\; 2u^i(D_\alpha\zeta)\zeta) \, \mathrm{d}x \;= \\
= c \int_{B_R} \zeta^2 \, \mathrm{d}x + I_1 + I_2.
\end{aligned}
$$

(i) Das Integral I_1 schätzt man unter Beachtung von (1.21) mit Hilfe der Youngschen Ungleichung ab. Dies ergibt

$$
I_1 \;\le\; cR^{-q} \int_{B_R} |u|^q \, \mathrm{d}x \;+\; \frac{\nu_0}{4} \int_{B_R} |\nabla u|^q \zeta^2 \, \mathrm{d}x.
$$

(ii) Für die Abschätzung von I_2 verwenden wir (1.20). Nach Anwendung der Hölderschen und der Youngschen Ungleichung schließt man

$$
I_2 \;\le\; c\,R^{-q} \int_{B_R} (R^q + |u|^q) \, \mathrm{d}x \;+\; \frac{\nu_0}{4} \int_{B_R} |\nabla u|^q.
$$

Die geforderte Ungleichung (1.48) erhält man nun nach Einsetzen der Abschätzungen von I_1 und I_2 in (1.51). ∎

Der nächste Satz liefert eine geeignete fundamentale Abschätzung für den Fall $n \le 3$. Der Beweis dieser Abschätzung verläuft fast völlig analog wie im Fall $q = 2$ (siehe [Campanato (1984), Campanato (1986)]).

Satz 1.3 *Sei $n \le 3$. Sei $u \in W^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung des Systems (1.47). Seien die Bedingungen (1.20)−(1.22) erfüllt. Dann gibt es eine positive Konstante $c = c(c_0/\nu_0, c_1, q, n, N)$, derart, daß für beliebige $B_\sigma \subset \Omega$ und $\forall\, 0 < t < 1$ gilt:*

$$
\int_{B_{t\sigma}} |u|^q \, \mathrm{d}x \;\le\; c\,t^n \int_{B_\sigma} (\sigma^q \;+\; |u|^q) \, \mathrm{d}x. \tag{1.52}
$$

Beweis. - Seien $B_\sigma \subset \Omega$ und $0 < t < 1$ beliebig, aber fixiert. Da die Abschätzung (1.52) für $\frac{1}{4} < t < 1$ trivialerweise erfüllt ist, können wir uns auf den Fall $0 < t \le \frac{1}{4}$ beschränken. Wegen $n \le 3$ folgt mit Hilfe von Lemma 1.4 und des Sobolevschen Einbettungssatzes:

$$
\begin{aligned}
(1.53) \qquad \int_{B_{t\sigma}} |u|^q \, \mathrm{d}x \;\le\; \mathrm{mes}(B_{t\sigma}) \|u\|^q_{L^\infty(B_{\sigma/4};\mathbb{R}^N)} \;\le \\
\le c\,t^n \left\{ \int_{B_\sigma} |u|^q \, \mathrm{d}x \;+\; \sigma^{q+2n/3} \left(\int_{B_{\sigma/4}} |\nabla u|^{3q} \, \mathrm{d}x \right)^{1/3} \right\}.
\end{aligned}
$$

Das zweite Integral der rechten Seite von (1.53) schätzen wir ebenfalls mit Hilfe des Sobolevschen Einbettungssatzes ab und benutzen anschließend (1.23) (vgl. Anmerkung 1.1). Hieraus folgt

$$\sigma^{2n/3}\left(\int_{B_{\sigma/4}} |\nabla u|^{3q}\,\mathrm{d}x\right)^{1/3} \leq \sigma^{2n/3}\left(\int_{B_{\sigma/4}} \left|(1+|\nabla u|)^{(q-2)/4}\nabla u\right|^{6}\mathrm{d}x\right)^{1/3} \leq$$
$$\leq c\int_{B_{\sigma/4}} |\nabla u|^{q}\,\mathrm{d}x + c\,\sigma^{2}\int_{B_{\sigma/4}} (1+|\nabla u|)^{q-2}|D^2u|^2\,\mathrm{d}x \leq$$
$$\leq c\left(\sigma^{n} + \int_{B_{\sigma/2}} |\nabla u|^{q}\,\mathrm{d}x\right),$$

und mit Hilfe von Lemma 1.6 ergibt sich

$$\sigma^{2n/3}\left(\int_{B_{\sigma/4}} |\nabla u|^{3q}\,\mathrm{d}x\right)^{1/3} \leq c\,\sigma^{-q}\int_{B_{\sigma}} (\sigma^{q}+|u|^{q})\,\mathrm{d}x. \tag{1.54}$$

Nach Einsetzen von (1.54) in (1.53), erhält man schließlich die Behauptung (1.52). ■

Die folgende fundamentale Abschätzung beweist man analog wie in[Campanato (1986)].

Satz 1.4 *Sei $u \in W^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung des Systems (1.47). Seien die Bedingungen (1.20)–(1.22) erfüllt. Dann gilt für alle $B_\sigma \subset \Omega$ und für jedes $0 < t < 1$:*

$$\int_{B_{t\sigma}} (1+|\nabla u|^{q})\,\mathrm{d}x \leq c\,t^{\lambda}\int_{B_{\sigma}} (1+|\nabla u|^{q})\,\mathrm{d}x, \tag{1.55}$$

wobei

$$\begin{cases} \lambda = 2 & \mathit{falls} \quad n \geq 3 \\ \lambda \in (1,2) \quad \mathit{beliebig} & \mathit{falls} \quad n = 2. \end{cases} \tag{1.56}$$

Hierbei ist c eine nur von $c_0/\nu_0, c_1, q, n$ und N abhängige Konstante. ■

Lokale $L^{q,\mu}$-Abschätzung

Vorbemerkung (Lipschitz-Rand): Für $\delta > 0$ bezeichne Q_δ den Quader $\Delta_\delta \times (-\delta,\delta)$, wobei

$$\Delta_\delta := \{y \in \mathbb{R}^{n-1}\,|\,|y_\alpha| < \delta \quad \forall\,\alpha = 1,\ldots,n-1\}.$$

Wir sagen ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gehört zur Klasse $\mathcal{C}^{0,1}$ [Bezeichnung: $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$], wenn für jedes $x_0 \in \partial\Omega$ ein $\delta > 0$, eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^N$ mit $x_0 \in U$ und eine Abbildung $\phi \in C^{0,1}(Q_\delta; \mathbb{R}^N)$ existieren, so daß

1. $\phi : Q_\delta \to U$ bijektiv,
2. $\phi^{-1} \in C^{0,1}(U; \mathbb{R}^n)$,
3. $\phi(\Delta_\delta \times (0, \delta)) = \Omega \cap U$. ■

Wir sind nun in der Lage, die folgende Morrey-Raum-Abschätzung zu beweisen.

Satz 1.5 *Wir nehmen an, daß $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$. Sei $g \in W^{1,\,q(\mu)}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ $(0 < \mu < \lambda)$* [15] *gegeben. Sei $u \in W^{1,\,q}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung des Dirichlet-Problems*:

$$u = g \quad \textit{f.ü. auf} \quad \partial\Omega \tag{1.57}$$

$$D_\alpha A_i^\alpha(x, \nabla u) = 0 \quad \textit{in } \Omega \qquad (i = 1, \ldots, N), \tag{1.58}$$

wobei A_i^α $(\alpha = 1, \ldots, n; i = 1, \ldots, N)$ differenzierbare Funktionen seien, die den Bedingungen (1.20)−(1.22) genügen. Dann gilt für jede beliebige offene Teilmenge $\Omega' \subset\subset \Omega$:

$$u \in W^{1,\,q(\mu)}(\Omega'; \mathbb{R}^N), \tag{1.59}$$

$$\|\nabla u\|_{L^{q,\,\mu}(\Omega'; \mathbb{R}^{nN})} \le c\Big(1 + \|\nabla u\|_{L^q(\Omega; \mathbb{R}^{nN})} + \|\nabla g\|_{L^{q,\,\mu}(\Omega; \mathbb{R}^{nN})}\Big), \tag{1.60}$$

wobei $c = \mathrm{const}$ nur von $c_0/\nu_0, c_1, q, n, N$ und von $1/\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ abhängt.

Die Aussage von Satz 1.5 folgt unmittelbar aus dem nachstehenden Lemma.

Lemma 1.7 *Sei $g \in W^{1,\,q(\mu)}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ $(0 < \mu < \lambda)$ gegeben. Sei $u \in W^{1,\,q}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung des Systems*:

$$D_\alpha A_i^\alpha(x, \nabla u + \nabla g) = 0 \quad \textit{in} \quad \Omega \qquad (i = 1, \ldots, N), \tag{1.61}$$

wobei A_i^α $(\alpha = 1, \ldots, n; i = 1, \ldots, N)$ den Voraussetzungen von Satz 1.6 genügen. Dann gilt für alle $B_\sigma \subset\subset \Omega$ die Abschätzung:

$$\int_{B_\sigma} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x \le c\,\sigma^\mu\Big(1 + \|\nabla u\|^q_{L^q(\Omega; \mathbb{R}^{nN})} + \|\nabla g\|^q_{L^{q,\,\mu}(\Omega; \mathbb{R}^{nN})}\Big), \tag{1.62}$$

wobei $c = \mathrm{const}$ nur von $c_0/\nu_0, c_1, q, n, N$ und von $1/\operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ abhängt.

[15] λ gemäß (1.56).

Beweis. - Sei $x_0 \in \Omega$ beliebig, aber fixiert. Sei $0 < \sigma < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ beliebig gewählt. Dann bezeichne $v \in W^{1,q}(B_\sigma; \mathbb{R}^N)$ die eindeutig bestimmte Lösung des folgenden Dirichlet-Problems

$$u - v \in W_\circ^{1,q}(B_\sigma; \mathbb{R}^N), \tag{1.63}$$

$$\int_{B_\sigma} A_i^\alpha(x, \nabla v) D_\alpha \varphi^i \, \mathrm{d}x \;=\; 0 \qquad \forall\, \varphi \in W_\circ^{1,q}(B_\sigma; \mathbb{R}^N). \tag{1.64}$$

Nach Satz 1.4 gilt für beliebige $0 < t < 1$:

$$\int_{B_{t\sigma}} (1 + |\nabla v|^q) \, \mathrm{d}x \;\le\; c\, t^\lambda \int_{B_\sigma} (1 + |\nabla v|^q) \, \mathrm{d}x. \tag{1.65}$$

Wegen (1.63) ist die Funktion $w := u - v$ für (1.64) zugelassen. Kombiniert man (1.64) und (1.61), so läßt sich leicht die Gültigkeit der folgenden Identität zeigen:

$$\int_{B_\sigma} (A_i^\alpha(x, \nabla u) - A_i^\alpha(x, \nabla v)) D_\alpha w^i \, \mathrm{d}x \;= \tag{1.66}$$

$$= \int_{B_\sigma} (A_i^\alpha(x, \nabla u) - A_i^\alpha(x, \nabla u + \nabla g)) D_\alpha w^i \, \mathrm{d}x.$$

Berücksichtigt man die Bedingungen (1.21) und (1.22), so folgert man aus (1.66) unter Benutzung von Lemma A.4

$$\nu_0 \int_{B_\sigma} (1 + |\nabla u| + |\nabla w|)^{q-2} |\nabla w|^2 \, \mathrm{d}x \;\le\; c \int_{B_\sigma} |\nabla g|^{q-1} \, |\nabla w| \, \mathrm{d}x. \tag{1.67}$$

Nach Anwendung der Hölderschen und der Youngschen Ungleichung erhält man

$$\int_{B_\sigma} |\nabla w|^q \, \mathrm{d}x \;\le$$

$$\le\; c \left(\int_{B_\sigma} (1 + |\nabla u|^q + |\nabla w|^q) \, \mathrm{d}x \right)^{2-q} \left(\int_{B_\sigma} |\nabla g|^q \, \mathrm{d}x \right)^{q-1} + \tag{1.68}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{B_\sigma} |\nabla w|^q \, \mathrm{d}x.$$

Nochmaliges Anwenden der Youngschen Ungleichung mit einem beliebig gewählten $0 < \varepsilon < 1$ führt zu

$$(1.69)\qquad \int_{B_\sigma} |\nabla w|^q \,\mathrm{d}x \;\le\; \varepsilon \int_{B_\sigma} (1+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x \;+\; c\,\varepsilon^{-\frac{2-q}{q-1}} \int_{B_\sigma} |\nabla g|^q \,\mathrm{d}x.$$

Sei nun $0 < t < 1$ beliebig gewählt. Dann folgt nach Anwendung der Dreiecksungleichung zusammen mit (1.65)

$$(1.70)\qquad \int_{B_{t\sigma}} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x \;\le\; c\,t^\lambda \int_{B_\sigma} (1+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x \;+\; c \int_{B_\sigma} |\nabla w|^q \,\mathrm{d}x.$$

Setzt man in (1.69) insbesondere $\varepsilon = t^\lambda$, so folgt nach Einsetzen dieser Ungleichung in (1.70)

$$(1.71)\qquad \int_{B_{t\sigma}} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x \;\le\; c\,t^\lambda \int_{B_\sigma} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x \;+\; c\,t^{-\frac{\lambda(2-q)}{q-1}}\,\sigma^\mu \Big(1 + \|\nabla g\|^q_{L^{q,\mu}(\Omega;\mathbb{R}^{nN})}\Big).$$

Da $0 < \sigma < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ beliebig gewählt wurde, und die positive Konstante c in (1.71) weder von $0 < t < 1$ noch von σ abhängt, erhalten wir die geforderte Ungleichung (1.62) aus (1.71) nach Anwendung von Lemma A.7. ∎

Beweis von Satz 1.5 - Sei $u \in W^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung des Dirichlet-Problems (1.57), (1.58). Insbesondere ist dann die Funktion $w = u - g$ eine schwache Lösung von (1.61). Sei nun $\Omega' \subset\subset \Omega$ beliebig fixiert. Dann haben wir mit Hilfe von Lemma 1.7

$$(1.72)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{B_\sigma} |\nabla w|^q \,\mathrm{d}x \;\le\; c\,\sigma^\mu \Big(1 + \|\nabla w\|^q_{L^q(\Omega;\mathbb{R}^{nN})} + \|\nabla g\|^q_{L^{q,\mu}(\Omega;\mathbb{R}^{nN})}\Big) \\ \forall\, x_0 \subset \Omega',\ \forall\, 0 < \sigma \le \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega). \end{cases}$$

Die Behauptung des Satzes ergibt sich nun unmittelbar aus (1.72) unter Verwendung der Dreiecksungleichung und der Definition des Morrey-Raumes $L^{q,\mu}(\Omega';\mathbb{R}^{nN})$. ∎

Kapitel 2

Globale Regularität

Der Gegenstand dieses Kapitels ist die Untersuchung einiger nichtlinearer *q-elliptischer* Randwertprobleme ($1 < q < 2$) und der Beweis globaler Regularitätsaussagen für schwache $W^{1,q}$-Lösungen. Im Mittelpunkt unseres Interesses steht hierbei die Herleitung einer L^∞-a-priori-Abschätzung, welche für den Fall $q \geq 2$ bereits bewiesen wurde (vgl. hierzu S. Campanato [Campanato (1984), Campanato (1983)]). Dieses Resultat wird später eine Schlüsselrolle beim Beweis der partiellen Regularität schwacher Lösungen nichtlinearer Systeme im Fall des natürlichen Wachstums spielen. Außerdem ist dieses Resultat für sich genommen interessant, da sich im Fall $n = 2$ unter geeigneten Voraussetzungen globale Regularität des Gradienten der schwachen Lösung ergibt.

2.1 $W^{2,p}$-Abschätzungen. Der Fall $\Omega = Q^+$

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einigen Erklärungen zu den hier verwendeten Bezeichnungen. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und bezeichne x' den $n-1$ dimensionalen Vektor $(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Dann schreiben wir $x = (x', x_n)$. Ferner bezeichne $\mathbb{R}^n_+$ die offene Halbebene $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_n > 0\}$. Sind $x^0 \in \mathbb{R}^n$ und $R > 0$ beliebig gegeben, so definieren wir die $(n-1)$- dimensionale Kugel $B'_R(x^0) = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \,|\, |x' - x^{0'}| < R\}$ und das offene Intervall $I_R(x^0) := \{t \in \mathbb{R} \,|\, |t - x^0_n| < R\}$. Außerdem setzen wir:

$$\begin{aligned} Q_R(x^0) &:= B'_R(x^0) \times I_R(x^0), \\ Q^+_R(x^0) &:= Q_R \cap \mathbb{R}^n_+, \\ \Gamma_R(x^0) &:= B'_R(x^0) \times \{0\}. \end{aligned}$$

Falls keine Verwechslungen auftreten können, schreiben wir kürzer B'_R $(Q_R, Q^+_R, \ldots)$ anstelle von $B'_R(x^0)$ $(Q_R(x^0), Q^+_R(x^0) \ldots)$. Insbesondere setzen wir $Q = Q_1(0), Q^+ = Q^+_1(0)$, $\Gamma = \Gamma_1(0)$.

Wir betrachten nun das folgende Dirichlet-Problem:

$$u = 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma, \tag{2.1}$$

$$D_\alpha A_i^\alpha(x, \nabla u) = 0 \quad \text{in} \quad Q^+ \qquad (i = 1, \ldots, N). \tag{2.2}$$

Hierbei seien die Koeffizienten $A_i^\alpha(x, \xi)$ $(\alpha = 1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, N)$ bezüglich x und ξ stetig differenzierbar und mögen den Bedingungen (1.20), (1.21) und (1.22) genügen.

Definition 2.1 *Eine Funktion* $u \in W^{1,q}(Q^+; \mathbb{R}^N)$ *heißt* **schwache Lösung von** (2.1), (2.2), *falls* $u = 0$ *fast überall auf* Γ [1)] *und die folgende Integralidentität für alle* $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(Q^+; \mathbb{R}^N)$ *erfüllt ist*:

$$\int_{Q^+} A_i^\alpha(x, \nabla u) D_\alpha \varphi^i \, \mathrm{d}x \;=\; 0. \tag{2.3}$$

■

Differenzierbarkeit bezüglich der Koordinaten x_β $(\beta = 1, \ldots, n-1)$

Zunächst erhalten wir ebenso wie beim Beweis der Differenzierbarkeit im Innern mit Hilfe der Methode des Differenzenquotienten die Existenz der zweiten verallgemeinerten Ableitungen längs der Randfläche Γ (vgl. [Naumann and Wolf (1992)], Satz 1).

Lemma 2.1 *Wir nehmen an, die Bedingungen* (1.20), (1.21) *und* (1.22) *seien erfüllt. Sei* $u \in W^{1,q}(Q^+; \mathbb{R}^N)$ *eine schwache Lösung des Problems* (2.1), (2.2). *Dann gilt für beliebige* $0 < R < 1$:

$$(1 + |\nabla u|)^{(q-2)/2} D_\alpha D_\beta u \in L^2(Q_R^+(0); \mathbb{R}^N) \quad (\alpha = 1, \ldots, n, \beta = 1, \ldots, n-1), \tag{2.4}$$

und für beliebige Paare konzentrischer Zylinder $Q_\sigma^+ \subset Q_R^+ \subset Q^+$ *haben wir die Abschätzung*:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n-1} \int_{Q_\sigma^+} (1 + |\nabla u|)^{q-2} |D_\alpha D_\beta u|^2 \, \mathrm{d}x \;\le\; \frac{c}{(R-\sigma)^2} \int_{Q_R^+} (1 + |\nabla u|^q) \, \mathrm{d}x, \tag{2.5}$$

wobei $c = \mathrm{const}$ *nur von* $c_0/\nu_0, c_1, q, n$ *und* N *abhängt.*

Beweis. - Seien $x^0 \in Q^+$ und $0 < \sigma < R < \operatorname{dist}(x^0, \partial Q)$ beliebig fixiert. Sei $\zeta \in C_c^\infty(Q_R)$ $(0 \le \zeta \le 1)$ eine geeignete Schnittfunktion, so daß $\zeta \equiv 1$ auf Q_σ^+ und $|\nabla \zeta|^2 + |D^2 \zeta| \le c(n)/(R-\sigma)^2$. Für $h \in \mathbb{R}$, $0 < |h| < \operatorname{dist}(x^0, \partial Q) - R$ definieren wir

1) Wir sagen $u = 0$ fast überall auf Γ, falls die Spur von u auf Γ fast überall (bezüglich des $n-1$-dimensionalen Oberflächenmaßes auf Γ) verschwindet.

$$(2.6) \qquad \varphi(x) \;=\; \Delta_{-h}^{(\beta)}(\zeta^2 \Delta_h^{(\beta)} u)(x) \text{ [2]} \quad (x \in Q^+;\ (\beta \in \{1, \dots, n-1\})).$$

Wegen $u = 0$ f.ü. auf Γ und $\zeta = 0$ auf $\partial Q^+ \setminus \Gamma$, folgt $\varphi = 0$ f.ü. auf ∂Q^+, also $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(Q^+; \mathbb{R}^N)$. Folglich ist φ eine für die Identität (2.3) zulässige Testfunktion. Mit einer ähnlichen Argumentation wie in [Naumann and Wolf (1992)] finden wir die Abschätzung:

$$(2.7) \qquad \int_{Q_\sigma^+} (1 + |\nabla u|^2 + |\nabla u(\cdot + he_\beta)|)^{q-2} |\Delta_h^{(\beta)} \nabla u|^2 \,\mathrm{d}x \;\le$$
$$\le \; \frac{c}{(R-\sigma)^2} \int_{Q_R^+} (1 + |\nabla u|^q) \,\mathrm{d}x,$$

wobei die Konstante $c > 0$ nur von $c_0/\nu_0, c_1, q, n$ und N abhängt. Hieraus folgern wir $D_\alpha D_\beta u \in L^q(Q_\sigma^+; \mathbb{R}^N)$ (vgl. [Naumann and Wolf (1992)]) und erhalten unter Verwendung von (2.7)

$$(2.8) \qquad \begin{cases} (1 + |\nabla u|^2 + |\nabla u(\cdot + he_\beta)|)^{\frac{q-2}{2}} \Delta_h^{(\beta)} D_\alpha u \rightharpoonup (1 + 2|\nabla u|)^{\frac{q-2}{2}} D_\alpha D_\beta u \\ \text{in} \quad L^2(Q_\sigma^+; \mathbb{R}^N) \quad \text{für} \quad h \to 0 \end{cases}$$

$(\alpha = 1, \dots, n, \beta = 1, \dots, n-1)$, was sofort die Behauptung (2.4) nach sich zieht.

Die Behauptung (2.5) folgt schließlich mit Hilfe von (2.8) aus (2.7) nach Ausführung des Grenzüberganges $h \to 0$. ■

Differenzierbarkeit bis zur Randfläche Γ

Wie in [Naumann and Wolf (1992)] bereits bewiesen wurde, ist die schwache Lösung u des Problems (2.1), (2.2) im Innern der Menge Q^+ im schwachen Sinne zweimal differenzierbar. Nach Anwendung der Produkt- und Kettenregel (vgl. [Campanato (1982)]) ergibt sich daher

$$(2.9) \qquad D_\alpha A_i^\alpha(x, \nabla u(x)) \;=\; \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial x_\alpha}(x, \nabla u(x)) \;+\; A_{ij}^{\alpha\beta}(x) D_\alpha D_\beta u^j(x) \quad \text{ffa. } x \in Q^+,$$

wobei

$$A_{ij}^{\alpha\beta}(x) \;:=\; \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial \xi_\beta^j}(x, \nabla u(x)) \quad (x \in Q^+)$$

[2] Hierbei bezeichne $(\Delta_h^{(\beta)} u)(x)$ den Differenzenquotienten $\frac{1}{h}(u(x + he_\beta) - u(x))$ $(x \in Q_R^+)$, wobei $e_\beta = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (die 1 an der β-ten Stelle, $\beta \in \{1, \dots, n\}$).

$(\alpha, \beta = 1, \dots, n; i, j = 1, \dots, N)$. Nach Einsetzen der Gleichung (2.9) in (2.2) bekommt man

$$
\begin{aligned}
(2.10) \qquad & A_{ij}^{nn} D_n D_n u^j = \\
& = - \sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} A_{ij}^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta u^j - \sum_{\beta=1}^{n-1} A_{ij}^{n\beta} D_n D_\beta u^j - \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial x_\alpha}(x, \nabla u)
\end{aligned}
$$

fast überall in Q^+ $(i = 1, \dots, N)$.

Andererseits folgt aus der Bedingung (1.22):

$$
(2.11) \qquad \begin{cases} \xi^T \mathbf{A}_{nn}(x)\xi \geq \nu_0 (1 + |\nabla u(x)|)^{q-2} |\xi|^2 \; ^{3)} \\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N \quad (x \in Q^+), \end{cases}
$$

was die Invertierbarkeit der Matrix $\mathbf{A}_{nn}(x)$ für fast alle $x \in Q^+$ nach sich zieht. Überdies liefert (2.11) die Abschätzung:

$$
(2.12) \qquad |\mathbf{A}_{nn}^{-1}(x)| \leq c\, \nu_0^{-1} (1 + |\nabla u(x)|)^{2-q} \quad \text{ffa. } x \in Q^+.
$$

Wendet man nun auf beide Seiten von (2.10) die lineare Abbildung $\mathbf{A}_{nn}^{-1}(x)$ an, so folgt mit Hilfe von (2.12) unter Berücksichtigung von (1.20) und (1.21),

$$
|D_n D_n u(x)|^2 \leq c \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n-1} |D_\alpha D_\beta u(x)|^2 + c\,(1 + |\nabla u(x)|^2) \quad \text{ffa. } x \in Q^+.
$$

Multipliziert man beide Seiten dieser Ungleichung mit dem Ausdruck $(1 + |\nabla u|)^{q-2}$, so findet man

$$
(2.13) \qquad \begin{cases} (1 + |\nabla u(x)|)^{q-2} |D_n D_n u(x)|^2 \leq \\ \leq c \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n-1} (1 + |\nabla u(x)|)^{q-2} |D_\alpha D_\beta u(x)|^2 + c\,(1 + |\nabla u(x)|^q) \\ \text{ffa. } x \in Q^+ \qquad (c = \text{const}). \end{cases}
$$

Seien Zylinder $Q_\sigma^+ \subset Q_R^+ \subset Q^+$ $(0 < \sigma < R)$ mit ein und dem selben Zentrum $x^0 \in Q^+$ gegeben. Da die rechte Seite von (2.13) über Q_σ^+ integrierbar ist (siehe Lemma 2.1), gilt dies auch für die linke Seite. Nach Integration beider Seiten von (2.13) über Q_σ^+ schließt man mit Hilfe von (2.5), daß

3) Hier bezeichne $\mathbf{A}_{nn}(x)$ die $N \times N$ Matrix $\{A_{ij}^{nn}(x)\}_{i,j=1,\dots,N}$ $(x \in Q^+)$.

$$(1+|\nabla u|)^{(q-2)/2} D_n D_n u \in L^2(Q^+_\sigma;\mathbb{R}^N).$$

Dies liefert schließlich zusammen mit Lemma 2.1 die Abschätzung

$$\int_{Q^+_\sigma} (1+|\nabla u|)^{q-2} |D^2 u|^2 \,\mathrm{d}x \le \frac{c}{(R-\sigma)^2} \int_{Q^+_R} (1+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x, \tag{2.14}$$

wobei die Konstante $c > 0$ nur von $c_0/\nu_0, c_1, q, n$ und N abhängt. Wir haben somit das folgende Resultat globaler Differenzierbarkeit.

Satz 2.1 *Seinen* (1.20)−(1.22) *erfüllt. Ist* $u \in W^{1,q}(Q^+;\mathbb{R}^N)$ *eine schwache Lösung des nichtlinearen Problems* (2.1), (2.2), *so gilt:*

$$u \in W^{2,\eta}(Q^+_R(0);\mathbb{R}^N) \quad \forall\, 0 < R < 1, \tag{2.15}$$

wobei

$$\begin{cases} \eta := \dfrac{nq}{n+q-2} & \textit{falls} \quad n \ge 3 \\ \eta \in [1,2) \quad \textit{beliebig} & \textit{falls} \quad n = 2. \end{cases}$$

Außerdem haben wir

$$(1+|\nabla u|)^{(q-2)/2} D_\alpha D_\beta u \in L^2(Q^+_R(0);\mathbb{R}^N) \quad \forall\, 0 < R < 1 \tag{2.16}$$

$(\alpha,\beta = 1,\dots,n)$, *und für beliebige Paare konzentrischer Zylinder* $Q^+_\sigma \subset Q^+_R \subset Q^+$ $(0 < \sigma < R)$ *gilt die Abschätzung*:

$$\int_{Q^+_\sigma} (1+|\nabla u|)^{q-2} |D^2 u|^2 \,\mathrm{d}x \le \frac{c}{(R-\sigma)^2} \int_{Q^+_R} (1+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x, \tag{2.17}$$

wobei $c = \mathrm{const}$ *nur von* $c_0/\nu_0, c_1, q, n$ *und* N *abhängt.* ■

2.2 $L^{q,\mu}(Q^+)$-a-priori-Abschätzungen

Argumentiert man unter Verwendung von Satz 2.1 in der gleichen Weise wie beim Beweis von Satz 1.4, so verifiziert man leicht das folgende

Lemma 2.2 *Sei* $x^0 \in \Gamma$ *und sei* $0 < \sigma < 1-|x^0|$. *Sei* $v \in W^{1,q}(Q^+_\sigma(x^0);\mathbb{R}^N)$ *eine schwache Lösung des Dirichlet-Problems*

$$v = 0 \quad \textit{f.ü. auf} \quad \Gamma_\sigma(x^0), \tag{2.18}$$

$$(2.19) \qquad D_\alpha A_i^\alpha(x, \nabla v) \;=\; 0 \quad in \quad Q_\sigma^+(x^0) \qquad (i = 1, \ldots, N), \text{ [4)]}$$

wobei die Koeffizienten A_i^α $(\alpha = 1, \ldots, n; i = 1, \ldots, N)$ *den Bedingungen* (1.20)–(1.22) *genügen mögen. Dann gibt es eine positive Konstante* $c = c(c_0/\nu_0,\, c_1, q, n, N)$ *derart, daß für alle* $0 < t < 1$ *gilt*:

$$(2.20) \qquad \int_{Q_{t\sigma}^+} (1 + |\nabla v|^q)\,\mathrm{d}x \;\leq\; c\,t^\lambda \int_{Q_\sigma^+} (1 + |\nabla v|^q)\,\mathrm{d}x$$

(λ *gemäß* (1.56)).

Beweis. - Wie man sich leicht überzeugen kann, ist die Behauptung für beliebige $1/2 \leq t < 1$ trivialerweise erfüllt. Es genügt also, die Behauptung für den Fall $0 < t < 1/2$ zu beweisen.

Zunächst folgern wir aus (2.17) (vgl. Satz 2.1), daß für beliebige $0 < t \leq \frac{1}{2}$ die folgende Caccioppoli-Ungleichung erfüllt ist:

$$(2.21) \qquad \int_{Q_{t\sigma}^+} (1 + |\nabla v|)^{q-2} |D^2 v|^2\,\mathrm{d}x \;\leq\; \frac{c}{\sigma^2} \int_{Q_\sigma^+} (1 + |\nabla v|^q)\,\mathrm{d}x.$$

Als nächstes setzen wir $w(x) := (1 + |\nabla v(x)|)^{q/2}$ $(x \in Q_\sigma^+)$. Mit Hilfe der Produkt- und Kettenregel verifiziert man unter Beachtung von Satz 2.1:

$$|\nabla w(x)|^2 \;\leq\; c\,(1 + |\nabla v(x)|)^{q-2} |D^2 v(x)|^2 \quad \text{ffa. } x \in Q_{\sigma/2}^+,$$

und zusammen mit (2.21) bekommt man:

$$(2.22) \qquad \int_{Q_{t\sigma}^+} |\nabla w|^2\,\mathrm{d}x \;\leq\; \frac{c}{\sigma^2} \int_{Q_\sigma^+} w^2\,\mathrm{d}x \qquad \forall\, 0 < t \leq \frac{1}{2}.$$

Andererseits, erhält man unter Benutzung der Dreiecksungleichung und der Hölderschen Ungleichung für beliebige $0 < t < \tau \leq \frac{1}{2}$

$$\|w\|_{L^2(Q_{t\sigma}^+)}^2 \;\leq\; c \left(\frac{t}{\tau}\right)^n \|w\|_{L^2(Q_{\tau\sigma}^+)}^2 \;+\; c\,\|w \;-\; w_{Q_{\tau\sigma}^+}\|_{L^2(Q_{\tau\sigma}^+)}^2.$$

Mit Hilfe der Poincaré-Ungleichung und (2.22) folgt hieraus

[4)] Eine schwache Lösung des Dirichlet-Problems (2.18), (2.19) sei wie in Definition 2.1 erklärt, indem man dort Q^+ durch $Q_\sigma^+(x^0)$ und Γ durch $\Gamma_\sigma(x^0)$ ersetzt.

$$\text{(2.23)} \qquad \begin{cases} \|w\|^2_{L^2(Q^+_{t\sigma})} \le c\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^n \|w\|^2_{L^2(Q^+_{\tau\sigma})} + c\,\tau^\lambda \|w\|^2_{L^2(Q^+_\sigma)} \\ \forall\, 0 < t < \tau \le \dfrac{1}{2} \quad (c = \text{const}). \end{cases}$$

Beachtet man $n > \lambda$, so ergibt sich die behauptete Ungleichung (2.20) unmittelbar aus (2.23) nach Anwendung von Lemma A.6. ∎

$L^{q,\mu}(Q^+)$-A-PRIORI-ABSCHÄTZUNGEN

Satz 2.2 *Sei $g \in W^{1,q(\mu)}(Q^+;\mathbb{R}^N)$ $(0 < \mu < \lambda)$. Sei $u \in W^{1,q}(Q^+_\sigma;\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung des Dirichlet-Problems*

$$\text{(2.24)} \qquad u = 0 \quad \textit{f.ü. auf} \quad \Gamma$$

$$\text{(2.25)} \qquad D_\alpha A^\alpha_i(x, \nabla u + \nabla g) = 0 \quad \textit{in} \quad Q^+ \qquad (i = 1, \dots, N).$$

Hierbei seien A^α_i $(\alpha = 1, \dots, n; i = 1, \dots, N)$ differenzierbare Funktionen, die den Bedingungen (1.20)–(1.22) genügen mögen. Dann gilt für beliebige $0 < R < 1$:

$$\text{(2.26)} \qquad \nabla u \in L^{q,\mu}(Q^+_R;\mathbb{R}^{nN}),$$

$$\text{(2.27)} \qquad \|\nabla u\|_{L^{q,\mu}(Q^+_R;\mathbb{R}^{nN})} \le c\Big(1 + \|\nabla u\|_{L^q(Q^+;\mathbb{R}^{nN})} + \|\nabla g\|_{L^{q,\mu}(Q^+;\mathbb{R}^{nN})}\Big),$$

wobei $c = \text{const} > 0$ nur von $c_0/\nu_0, c_1, q, n, N$ und von $1/(1-R)$ abhängt.

BEWEIS. - Sei $0 < R < 1$ beliebig, aber fixiert. Wir unterscheiden die zwei möglichen Fälle $x^0 \in \Gamma_R$ oder $x^0 \in Q^+$ und behandeln diese getrennt.

1° *Der Fall $x^0 \in \Gamma_R$*: Sei $0 < \sigma \le 1 - R$ beliebig gewählt. Sei $v \in W^{1,q}(Q^+_\sigma(x^0);\mathbb{R}^N)$ die eindeutig bestimmte schwache Lösung des folgenden Dirichlet-Problems:

$$\text{(2.28)} \qquad u - v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(Q^+_\sigma(x^0);\mathbb{R}^N),$$

$$\text{(2.29)} \qquad D_\alpha A^\alpha_i(x, \nabla v) = 0 \quad \text{in} \quad Q^+_\sigma(x^0) \qquad (i = 1, \dots, N).$$

Wegen (2.28) und $u = 0$ fast überall auf Γ (siehe (2.24)) ist $v = 0$ fast überall auf $\Gamma_\sigma(x_0)$, was bedeutet, daß v ist eine schwache Lösung von (2.18), (2.19) ist. Das Lemma 2.2 liefert nun die Ungleichung:

$$\text{(2.30)} \qquad \int_{Q^+_{t\sigma}(x^0)} (1 + |\nabla v|^q)\,\mathrm{d}x \le c\,t^\lambda \int_{Q^+_\sigma(x^0)} (1 + |\nabla v|^q)\,\mathrm{d}x \quad \forall\, 0 < t < 1.$$

Als nächstes definieren wir $w := u - v$ in $Q_\sigma^+(x^0)$. Aus (2.28) ist ersichtlich, daß $w \in W_\circ^{1,q}(Q_\sigma^+(x^0);\mathbb{R}^N)$. Folglich ist w eine für die entsprechenden Integralidentitäten zugelassene Testfunktion. Kombiniert man (2.25) und (2.29), so ergibt sich:

$$\tag{2.31} \int_{Q_\sigma^+} (A_i^\alpha(x,\nabla u) - A_i^\alpha(x,\nabla v)) D_\alpha w^i \,\mathrm{d}x = \\ = \int_{Q_\sigma^+} (A_i^\alpha(x,\nabla u) - A_i^\alpha(x,\nabla u + \nabla g)) D_\alpha w^i \,\mathrm{d}x.$$

Beachtet man (1.21) und (1.22), so folgt aus (2.31) unter Benutzung von Lemma A.4 und der Hölderschen Ungleichung:

$$\tag{2.32} \nu_0 \int_{Q_\sigma^+} (1 + |\nabla u| + |\nabla w|)^{q-2} |\nabla w|^2 \,\mathrm{d}x \le \\ \le c \left(\int_{Q_\sigma^+} |\nabla g|^q \,\mathrm{d}x \right)^{1/q'} \left(\int_{Q_\sigma^+} |\nabla w|^q \,\mathrm{d}x \right)^{1/q}.$$

Mit der gleichen Argumentation wie beim Beweis von Lemma 1.7 bekommt man nach Anwendung der Hölderschen und der Youngschen Ungleichung für ein beliebig gewähltes $0 < \varepsilon < 1$ die Abschätzung:

$$\tag{2.33} \int_{Q_\sigma^+} |\nabla w|^q \,\mathrm{d}x \le \varepsilon \int_{Q_\sigma^+} (1 + |\nabla u|^q) \,\mathrm{d}x + c\,\varepsilon^{-\frac{2-q}{q-1}} \int_{Q_\sigma^+} |\nabla g|^q \,\mathrm{d}x.$$

Sei nun $0 < t < 1$ beliebig gewählt. Dann folgt nach Anwendung der Dreiecksungleichung zusammen mit (2.30)

$$\tag{2.34} \int_{Q_{t\sigma}^+} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x \le c\,t^\lambda \int_{Q_\sigma^+} (1 + |\nabla u|^q) \,\mathrm{d}x + c \int_{Q_\sigma^+} |\nabla w|^q \,\mathrm{d}x.$$

Indem man in (2.33) insbesondere $\varepsilon = t^\lambda$ wählt und die so gewonnene Abschätzung in (2.34) einsetzt, findet man

$$\tag{2.35} \int_{Q_{t\sigma}^+} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x \le c\,t^\lambda \int_{Q_\sigma^+} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x + c\,t^{-\frac{\lambda(2-q)}{q-1}} \sigma^\mu \Big(1 + \|\nabla g\|^q_{L^{q,\mu}(Q^+;\mathbb{R}^{nN})} \Big).$$

Hieraus folgt schließlich nach Anwendung von Lemma A.7 die Abschätzung

$$\tag{2.36} \sigma^{-\mu} \int_{Q_\sigma^+} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x \le \frac{c}{(1-R)^\mu} \Big(1 + \|\nabla u\|^q_{L^q(Q^+;\mathbb{R}^{nN})} + \|\nabla g\|^q_{L^{q,\mu}(Q^+;\mathbb{R}^{nN})} \Big),$$

wobei $c = \text{const} > 0$ weder von x^0 noch von $0 < \sigma \le 1 - R$ abhängt.

2° *Der Fall* $x^0 \in Q^+$: Seien $0 < \sigma < 1 - R$ und $0 < t < \frac{1}{2}$ beliebig gewählt. Wir setzen $d = x_n^0$ und unterscheiden die folgenden drei Fälle:

(i) $\sigma \le d$: In diesem Fall erhält man mit einer analogen Argumentation, die zu (1.71) führte, indem man dort die Kugeln durch entsprechende Zylinder ersetzt

$$(2.37) \qquad \int_{Q_{t\sigma}} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x \le c\,t^\lambda \int_{Q_\sigma} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x + c\,t^{-\frac{\lambda(2-q)}{q-1}} \sigma^\mu \Big(1 + \|\nabla g\|^q_{L^{q,\mu}(Q^+;\mathbb{R}^{nN})}\Big).$$

(ii) $t\sigma \ge d$: Wir setzen $y^0 = (x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, 0)$. Elementar verifiziert man in diesem Fall

$$Q^+_{t\sigma}(x^0) \subset Q^+_{2t\sigma}(y^0) \subset Q^+_\sigma(y^0) \subset Q^+_\sigma(x^0),$$

und unter Verwendung von (2.35) (siehe 1°) bekommt man

$$(2.38) \qquad \int_{Q^+_{t\sigma}} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x \le c\,t^\lambda \int_{Q^+_\sigma} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x + c\,t^{-\frac{\lambda(2-q)}{q-1}} \sigma^\mu \Big(1 + \|\nabla g\|^q_{L^{q,\mu}(Q^+;\mathbb{R}^{nN})}\Big).$$

(iii) $\sigma > d$ *und* $t\sigma < d$: Zunächst gilt wegen (2.37) die Abschätzung

$$(2.39) \qquad \int_{Q^+_{t\sigma}} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x \le c\,t^\lambda \left(\frac{\sigma}{d}\right)^\lambda \int_{Q^+_d} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x + c\,t^{-\frac{\lambda(2-q)}{q-1}} d^\mu \Big(1 + \|\nabla g\|^q_{L^{q,\mu}(Q^+;\mathbb{R}^{nN})}\Big),$$

und aus (2.38) (mit $t = d/\sigma$) folgt

$$(2.40) \qquad \int_{Q^+_d} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x \le c \left(\frac{d}{\sigma}\right)^\lambda \int_{Q^+_\sigma} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x + c\,t^{-\frac{\lambda(2-q)}{q-1}} \sigma^\mu \Big(1 + \|\nabla g\|^q_{L^{q,\mu}(Q^+;\mathbb{R}^{nN})}\Big).$$

Kombination von (2.39) und (2.40) liefert auch in diesem Fall die Abschätzung (2.38).

Da die Abschätzung (2.37) (bzw. (2.38)) für alle $\frac{1}{2} < t < 1$ trivialerweise erfüllt ist, erhält man nach Anwendung von Lemma A.7 wie in 1° die Ungleichung

$$(2.41) \qquad \sigma^{-\mu} \int_{Q^+_\sigma} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x \le \frac{c}{(1-R)^\mu} \Big(1 + \|\nabla u\|^q_{L^q(Q^+;\mathbb{R}^{nN})} + \|\nabla g\|^q_{L^{q,\mu}(Q^+;\mathbb{R}^{nN})}\Big),$$

wobei $c = \mathrm{const} > 0$ weder von x^0 noch von $0 < \sigma \le 1 - R$ abhängt.

Die Behauptung des Satzes folgt nun unmittelbar aus (2.36) (bzw. (2.41)) und der Definition des Raumes $L^{q,\mu}(Q^+_R)$. ■

2.3 $L^{q,\mu}(\Omega)$-Regularität für beliebige Gebiete mit C^2-Rand

Lokale Koordinatentransformation

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene beschränkte Menge mit $\partial\Omega \in C^2$. Sei $x^0 \in \partial\Omega$ beliebig gewählt. Dann existiert eine offene Umgebung $\mathcal{U}$ von x^0 und eine zweimal stetig differenzierbare bijektive Abbildung $\mathcal{T} : \mathcal{U} \to Q$, so daß

$$\det(D\mathcal{T}(x)) \neq 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{U}; \tag{2.42}$$

$$\mathcal{T}(\Omega \cap \mathcal{U}) \;=\; Q^+, \tag{2.43}$$

$$\mathcal{T}(\partial\Omega \cap \mathcal{U}) \;=\; \Gamma. \tag{2.44}$$

Weiterhin setzen wir:

$$\tilde{A}_i^\alpha(y,\xi) \;:=\; \frac{1}{J}\frac{\partial \mathcal{T}^\alpha}{\partial x_\beta}(\mathcal{T}^{-1}(y))A_i^\beta((D\mathcal{T})^*(\mathcal{T}^{-1}(y))\cdot\xi) \quad (y \in Q^+,\ \xi \in \mathbb{R}^{nN}) \tag{2.45}$$

$(\alpha = 1,\dots,n; i = 1,\dots,N)$, wobei

$$J(x) := |\det(D\mathcal{T}(x))| \quad (x \in \mathcal{U}).$$

Nun sei $u \in W^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung des Systems

$$D_\alpha A_i^\alpha(\nabla u) \;=\; 0 \quad \text{in} \quad \Omega \qquad (i = 1,\dots,N). \tag{2.46}$$

Dann definieren wir $U := u \circ \mathcal{T}^{-1} : Q^+ \to \mathbb{R}^N$. Mit Hilfe der Kettenregel und Anwendung der Transformationsformel für das Lebesgue-Integral erhalten wir für beliebige $\psi \in C_c^1(Q^+;\mathbb{R}^N)$:

$$\int_{Q^+} \tilde{A}_i^\alpha(y,\nabla U) D_\alpha\psi^i \,\mathrm{d}y \;=$$

$$= \int_{Q^+} \frac{1}{J}\frac{\partial \mathcal{T}^\alpha}{\partial x_\beta}(\mathcal{T}^{-1}(y))A_i^\beta((D\mathcal{T})^*(\mathcal{T}^{-1}(y))\cdot\nabla U^T)D_\alpha\psi^i \,\mathrm{d}y \;= \tag{2.47}$$

$$= \int_{\Omega\cap\mathcal{U}} A_i^\beta(\nabla u(x))\frac{\partial \mathcal{T}^\alpha}{\partial x_\beta}(x) D_\alpha\psi^i(\mathcal{T}(x))\,\mathrm{d}x.$$

Wir setzen $\varphi = \psi \circ \mathcal{T} \in C^1_c(\Omega \cap \mathcal{U}; \mathbb{R}^N)$. Dann folgt aus (2.47):

$$\int_{Q^+} \tilde{A}^\alpha_i(y, \nabla U) D_\alpha \psi^i \, dy = \int_{\Omega \cap \mathcal{U}} A^\beta_i(\nabla u) D_\beta \varphi^i \, dx = 0. \tag{2.48}$$

Also ist U eine schwache Lösung des Systems

$$D_\alpha \tilde{A}^\alpha_i(y, \nabla U) = 0 \quad \text{in} \quad Q^+ \qquad (i = 1, \ldots, N). \tag{2.49}$$

Als nächstes verifizieren wir, daß die Koeffizienten $\tilde{A}^\alpha_i$ ($\alpha = 1, \ldots, n; i = 1, \ldots, N$) den Bedingungen (1.20), (1.21) und (1.22) genügen. Dazu setzen wir für $y \in Q^+$ und $\xi \in \mathbb{R}^{nN}$:

$$\begin{aligned} G(y) &:= (D\mathcal{T})^*(\mathcal{T}^{-1}(y)), \\ \eta(y, \xi) &:= G(y) \cdot \xi. \end{aligned}$$

Unter Beibehaltung der oben eingeführten Bezeichnungen berechnet man mit Hilfe der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{A}^\alpha_i}{\partial \xi^j_\beta}(y, \xi) &= \frac{1}{J} \frac{\partial \mathcal{T}_\alpha}{\partial x_\gamma}(\mathcal{T}^{-1}(y)) D_{\xi_\beta} \left\{ A^\gamma_i(\eta_1(y, \xi), \ldots, \eta_n(y, \xi)) \right\} = \\ &= \frac{1}{J} \frac{\partial \mathcal{T}_\alpha}{\partial x_\beta}(\mathcal{T}^{-1}(y)) (D_{\eta_\theta} A^\gamma_i)(\eta(y, \xi)) \frac{\partial \mathcal{T}_\beta}{\partial x_\theta}(\mathcal{T}^{-1}(y)). \end{aligned}$$

Aus den obigen Definitionen folgt für beliebige $\zeta \in \mathbb{R}^N$

$$\frac{\partial \tilde{A}^\alpha_i}{\partial \xi^j_\beta}(y, \xi) \zeta^i_\alpha \zeta^j_\beta = \frac{\partial A^\gamma_i}{\partial \eta^j_\theta}(\eta(y, \xi)) \widehat{\zeta}^i_\gamma(y) \widehat{\zeta}^j_\theta(y) \quad \forall \{y, \xi\} \in Q^+ \times \mathbb{R}^{nN}, \tag{2.50}$$

wobei $\widehat{\zeta}(y) = G(y) \cdot \xi / \sqrt{J(\mathcal{T}^{-1}(y))}$ $(y \in Q^+)$.

Da die Koeffizienten A^α_i ($\alpha = 1, \ldots, n; i = 1, \ldots, N$) den Bedingungen (1.15) und (1.16) genügen, schließen wir:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{A}^\alpha_i}{\partial \xi^j_\beta}(y, \xi) \zeta^i_\alpha \zeta^j_\beta \geq \dfrac{\nu_0}{J}(1 + |G(y) \cdot \xi)|)^{q-2} |G(y) \cdot \zeta|^2 \\ \displaystyle\sum_{\alpha\beta=1}^n \sum_{i,j=1}^N \left| \frac{\partial \tilde{A}^\alpha_i}{\partial \xi^j_\beta}(y, \xi) \right| \leq \frac{c_0}{J}(1 + |G(y) \cdot \xi|)^{q-2} \\ \forall\, y \in Q^+, \ \forall\, \xi, \zeta \in \mathbb{R}^{nN}. \end{cases} \tag{2.51}$$

Aufgrund der Differenzierbarkeitseigenschaften von $\mathcal{T}$ folgern wir, daß die Koeffizienten $\tilde{A}^\alpha_i$ ($\alpha = 1, \ldots, n; i = 1, \ldots, N$) den Bedingungen (1.20), (1.21) und (1.22) genügen, wobei wir ggf. die Konstanten ν_0, c_0, c_1 durch ν'_0, c'_0, c'_1 ersetzen.

Sei $g \in W^{1,\,q(\mu)}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ $(0 < \mu < \lambda)$ und sei $u \in W^{1,\,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung des folgenden Dirichlet-Problems:

$$u = g \quad \text{f.ü. auf} \quad \partial\Omega \tag{2.52}$$

$$D_\alpha A_i^\alpha(\nabla u)) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \qquad (i = 1, \ldots, N). \tag{2.53}$$

Dann setzen wir in Q^+ :

$$U \,:=\, u \circ \mathcal{T}^{-1}, \quad G \,:=\, g \circ \mathcal{T}^{-1}, \quad W \,:=\, U - G.$$

Aus $\mathcal{T} \in C^2(\mathcal{U};\mathbb{R}^n)$ und $g \in W^{1,\,q(\mu)}(\Omega \cap \mathcal{U};\mathbb{R}^N)$ folgt mit Hilfe der Kettenregel

$$W \in W^{1,\,q}(Q^+;\mathbb{R}^N) \quad \text{und} \quad W = 0 \quad \text{f.ü. auf} \quad \Gamma,$$
$$G \in W^{1,\,q(\mu)}(Q^+;\mathbb{R}^N).$$

Aus (2.48) ist außerdem ersichtlich, daß W eine schwache Lösung des folgenden Dirichlet-Problems ist:

$$W = 0 \quad \text{f.ü. auf} \quad \Gamma. \tag{2.54}$$

$$D_\alpha \tilde{A}_i^\alpha(y, \nabla W + \nabla G)) = 0 \quad \text{in} \quad Q^+ \qquad (i = 1, \ldots, N). \tag{2.55}$$

Somit erhält man mit Hilfe von Satz 2.2 unter Verwendung der Dreiecksungleichung für jedes beliebige $0 < R < 1$:

$$\|\nabla U\|_{L^{q,\,\mu}(Q_R^+;\mathbb{R}^{nN})} \,\le\, c\Big(1 + \|\nabla U\|_{L^q(Q^+;\mathbb{R}^{nN})} + \|\nabla G\|_{L^{q,\,\mu}(Q^+;\mathbb{R}^{nN})}\Big). \tag{2.56}$$

Zusätzlich schließt man hieraus unter Verwendung der Poincaré-Ungleichung:

$$U \in \mathfrak{L}^{q,\,\mu+q}(Q_R^+;\mathbb{R}^N), \tag{2.57}$$

$$[U]_{\mathfrak{L}^{q,\,\mu+q}(Q_R^+;\mathbb{R}^N)} \,\le\, c\Big(1 + \|\nabla U\|_{L^q(Q^+;\mathbb{R}^{nN})} + \|\nabla G\|_{L^{q,\,\mu}(Q^+;\mathbb{R}^{nN})}\Big). \tag{2.58}$$

Als nächstes definieren wir $\mathcal{V} = \mathcal{T}^{-1}(Q_{1/2}^+)$. Aufgrund der Güte der Transformation $\mathcal{T}$ bleiben die Morrey- bzw. die Campanato-Raum-Eigenschaften bei der Transformation vermöge $\mathcal{T}$ erhalten. Darüber hinaus folgern wir mit Hilfe der Kettenregel und den Abschätzungen (2.56) und (2.58):

$$u\big|_{\mathcal{V}} \in \mathcal{L}^{q,\,\mu+q} \cap W^{1,\,q(\mu)}(\mathcal{V};\mathbb{R}^N), \tag{2.59}$$

$$(2.60) \qquad [u]_{\mathfrak{L}^{q,\,\mu+q}(\mathcal{V};\mathbb{R}^N)} + \|\nabla u\|_{L^{q,\,\mu}(\mathcal{V};\mathbb{R}^{nN})} \le c\Big(1 + \|\nabla u\|_{L^q(\Omega;\mathbb{R}^{nN})} + \|\nabla g\|_{L^{q,\,\mu}(\Omega;\mathbb{R}^{nN})}\Big).$$

Nun können wir eine offene Überdeckung $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_m$ ($\mathcal{V}_0 \subset\subset \Omega$) der Menge $\overline{\Omega}$ derart finden, daß (1.60) für $\mathcal{V}_0$ und (2.60) für jede der Mengen $\mathcal{V}_j$ ($j = 1, \ldots, m$) gültig ist. Hieraus ergibt sich die folgende a-priori-Abschätzung

$$(2.61) \qquad [u]_{\mathfrak{L}^{q,\,\mu+q}(\Omega;\mathbb{R}^N)} + \|\nabla u\|_{L^{q,\,\mu}(\Omega;\mathbb{R}^{nN})} \le c\Big(1 + \|\nabla u\|_{L^q(\Omega;\mathbb{R}^{nN})} + \|\nabla g\|_{L^{q,\,\mu}(\Omega;\mathbb{R}^{nN})}\Big)$$

mit einer Konstanten $c > 0$, die nur von $c_0/\nu_0, q, n, N$ und $\partial\Omega$ abhängt. Somit gilt der

Satz 2.3 *Sei $g \in W^{1,\,q(\mu)}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ $(0 < \mu < \lambda$ [5]$)$. Sei $u \in W^{1,\,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung des Problems (2.52), (2.53), wobei die Bedingungen (1.15) und (1.16) erfüllt seien. Dann haben wir:*

$$(2.62) \qquad u \in \mathfrak{L}^{q,\,\mu+q} \cap W^{1,\,q(\mu)}(\Omega;\mathbb{R}^N),$$

$$(2.63) \qquad [u]_{\mathfrak{L}^{q,\,\mu+q}(\Omega;\mathbb{R}^N)} + \|\nabla u\|_{L^{q,\,\mu}(\Omega;\mathbb{R}^{nN})} \le c\Big(1 + \|\nabla g\|_{L^{q,\,\mu}(\Omega;\mathbb{R}^{nN})}\Big),$$

wobei $c =$ const nur von $c_0/\nu_0, q, n, N$ und den Eigenschaften des Randes $\partial\Omega$ abhängt. ∎

Satz 2.3 liefert zusammen mit dem Sobolevschen Einbettungssatz die

Folgerung 2.1 *Sei $u \in W^{1,\,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung des Problems (2.52), (2.53) und seien alle Voraussetzungen von Satz 2.3 erfüllt. Falls $n \le 3$ und $n - q < \mu < 2$, so ist u bezüglich des Exponenten $\gamma := (\mu + q - n)/q$ auf $\overline{\Omega}$ Hölder-stetig . Außerdem gilt die folgende Abschätzung:*

$$(2.64) \qquad \|u\|_{C^{0,\,\gamma}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)} \le c\Big(1 + \|\nabla g\|_{L^{q,\,\mu}(\Omega;\mathbb{R}^{nN})}\Big). \qquad ∎$$

2.4 $L^\infty(\Omega)$-a-priori-Abschätzung bis zum Rand

Satz 2.4 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ ein konvexes Gebiet, dessen Rand zur Klasse C^2 gehöre. Seien die Bedingungen (1.15) und (1.16) erfüllt. Sei $u \in W^{1,\,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ $(1 < q < 2)$ eine schwache Lösung von (2.52), (2.53) mit $g \in L^\infty \cap W^{1,\,q(n-q)}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Dann ist u auf Ω*

[5] Hier sei λ gemäß (1.56).

wesentlich beschränkt und es gibt eine positive Konstante c, die nur von $c_0/\nu_0, q, n$, N und der Beschaffenheit von $\partial\Omega$ abhängt, so daß

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)} \le c\Big(1 + \|g\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)} + \|\nabla g\|_{L^{q,\,n-q}(\Omega;\mathbb{R}^{nN})}\Big). \tag{2.65}$$

Beweis. - Sei $x_0 \in \Omega$ beliebig fixiert. Wir setzen $d := \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$. Sei $y_0 \in \partial\Omega$ so gewählt, daß:

$$|x_0 - y_0| = d.$$

Da offensichtlich $B_d(x_0) \subset B_{2d}(y_0)$ gilt, kann man sich mit Hilfe von (1.52) (vgl. Satz 1.3) leicht klarmachen, daß für jedes $0 < t < 1$:

$$\int_{B_{td}(x_0)} |u|^q \,\mathrm{d}x \le ct^n \int_{B_d(x_0)} (1 + |u|^q)\,\mathrm{d}x \le c\,t^n\Big(d^n + \|u\|^q_{L^q(B_{2d}(y_0)\cap\Omega;\mathbb{R}^N)}\Big). \tag{2.66}$$

Da nach Voraussetzung die Menge $B_{2d}(y_0) \cap \Omega$ konvex ist, erhalten wir nach Anwendung der Dreiecksungleichung und der Poincaré-Ungleichung

$$\begin{aligned} \|u\|^q_{L^q(B_{2d}(y_0)\cap\Omega;\mathbb{R}^N)} &\le 2\|u - g\|^q_{L^q(B_{2d}(y_0)\cap\Omega;\mathbb{R}^N)} + c\,d^n\|g\|^q_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)} \le \\ &\le c\,d^q\|\nabla u - \nabla g\|^q_{L^q(B_{2d}(y_0)\cap\Omega;\mathbb{R}^{nN})} + c\,d^n\|g\|^q_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)}. \end{aligned} \tag{2.67}$$

Aufgrund von $n - q < \lambda$ ist Satz 2.3 anwendbar, weshalb (2.63) erfüllt ist. Folglich gilt

$$\begin{aligned} \|\nabla u - \nabla g\|^q_{L^q(B_{2d}(y_0)\cap\Omega;\mathbb{R}^{nN})} &\le c\,d^{n-q}\|\nabla u - \nabla g\|^q_{L^{q,\,n-q}(\Omega;\mathbb{R}^{nN})} \le \\ &\le c\,d^{n-q}\Big(1 + \|\nabla g\|^q_{L^{q,\,n-q}(\Omega;\mathbb{R}^{nN})}\Big), \end{aligned} \tag{2.68}$$

und nach Einsetzen der Ungleichung (2.68) in (2.67) ergibt sich

$$\|u\|^q_{L^q(B_{2d}(y_0)\cap\Omega;\mathbb{R}^N)} \le c\,d^n\Big(1 + \|g\|^q_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)} + \|\nabla g\|^q_{L^{q,\,n-q}(\Omega;\mathbb{R}^{nN})}\Big). \tag{2.69}$$

Schließlich erhält man nach Kombination von (2.66) und (2.69)

$$\fint_{B_{td}(x_0)} |u|^q \,\mathrm{d}x \le c\Big(1 + \|g\|^q_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)} + \|\nabla g\|^q_{L^{q,\,n-q}(\Omega;\mathbb{R}^{nN})}\Big), \tag{2.70}$$

wobei die Konstante $c > 0$ weder von t, d noch von $x_0 \in \Omega$ abhängt. Unter der Annahme, daß $x_0 \in \Omega$ ein Lebesgue-Punkt [6] von $|u|$ ist, folgern wir aus (2.70) unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung:

[6] Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann heißt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ Lebesgue-Punkt von f, falls $\lim\limits_{r\to 0^+} f_{B_r(x_0)} = f(x_0)$.

$$|u(x_0)| \;=\; \lim_{t\to 0^+} \fint_{B_{td(x_0)}} |u|\,\mathrm{d}x \;\le\; c\Big(1+\|g\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)}+\|\nabla g\|_{L^{q,\,n-q}(\Omega;\mathbb{R}^{nN})}\Big).$$

Da fast jeder Punkt $x_0 \in \Omega$ ein Lebesgue-Punkte von $|u|$ ist (siehe in [Stein (1970)]), folgt die Behauptung des Satzes unmittelbar aus der letzten Abschätzung. ∎

Folgerung 2.2 *Seien* (1.15) *und* (1.16) *erfüllt. Sei* $u \in W^{1,q}(B_R(x_0);\mathbb{R}^N)$ *eine schwache Lösung von* (2.52), (2.53) ($\Omega = B_R(x_0)$) *und* $g \in L^\infty \cap W^{1,q(n-q)}(B_R(x_0);\mathbb{R}^N)$. *Dann ist u wesentlich beschränkt und es gilt die a-priori-Abschätzung*:

$$\|u\|_{L^\infty(B_R;\mathbb{R}^N)} \;\le\; c\Big(R+\|g\|_{L^\infty(B_R;\mathbb{R}^N)}+\|\nabla g\|_{L^{q,\,n-q}(B_R;\mathbb{R}^{nN})}\Big), \tag{2.71}$$

wobei $c = \mathrm{const} > 0$ *nur von* $c_0/\nu_0, q, n$ *und* N *abhängt.*

Beweis. - Sei $u \in W^{1,q}(B_R(x_0);\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung des Problems (2.52), (2.53). Wir betrachten die lineare Koordinatentransfomation $\mathcal{T} : x \mapsto y = (x - x^0)/R$, welche die Kugel $B_R(x_0)$ auf die Einheitskugel B_1 abbildet. Dann setzen wir

$$U(y) \;:=\; \frac{1}{R}\,u(\mathcal{T}^{-1}(y)), \quad G(y) \;:=\; \frac{1}{R}\,g(\mathcal{T}^{-1}(y)) \quad (y \in B_1).$$

Mit Hilfe der Transformationsformel für das Lebesgue-Integral verifiziert man, daß

$$G \in L^\infty \cap W^{1,q(n-q)}(B_1;\mathbb{R}^N),$$

$$\|\nabla G\|_{L^{q,\,n-q}(B_1;\mathbb{R}^{nN})} \;=\; \frac{1}{R}\|\nabla g\|_{L^{q,\,n-q}(B_R;\mathbb{R}^{nN})}. \tag{2.72}$$

Überdies ist $U \in W^{1,q}(B_1;\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung des folgenden Dirichlet-Problems:

$$U = G \quad \text{f.ü. auf} \quad \partial B_1 \tag{2.73}$$

$$D_\alpha A_i^\alpha(\nabla U) = 0 \quad \text{in} \quad B_1 \qquad (i = 1,\dots,N). \tag{2.74}$$

Aus Satz 2.4 ergibt sich nun, daß U wesentlich beschränkt ist, und mit Hilfe von (2.72) bestätigt man die folgende a-priori-Abschätzung:

$$\|U\|_{L^\infty(B_1;\mathbb{R}^N)} \;\le\; \frac{c}{R}\Big(R+\|g\|_{L^\infty(B_R;\mathbb{R}^N)}+\|\nabla g\|_{L^{q,\,n-q}(B_R;\mathbb{R}^{nN})}\Big). \tag{2.75}$$

Die Behauptung folgt nun sofort aus (2.75) und der Definition von U. ∎

Kapitel 3

Partielle Regularität

3.1 Einführung

Dieses Kapitel widmen wir der qualitativen Untersuchung schwacher Lösungen nichtlinearer elliptischer Systeme, sowohl für den Fall des *kontrollierten Wachstums* (vgl. Abschnitt 3.2), als für den des *natürlichen Wachstums* (vgl. Abschnitt 3.3). Aufgrund der uns bekannten Gegenbeispiele, können wir nicht wie im skalaren Fall ($N = 1$) (vgl. [De Giorgi (1957), Moser (1961), Ladyzenskaya and Ural'ceva (1968)]) erwarten, daß solche schwache Lösungen Hölder-stetig sind. Es bleibt jedoch die Frage zu klären, ob zumindest *partielle Regularität* vorliegt, das heißt: Hölder-Stetigkeit außerhalb einer abgeschlossenen Nullmenge bezüglich des Lebesgue-Maßes (bzw. bezüglich eines geeigneten Hausdorff-Maßes $\mathcal{H}_\alpha\,(0 < \alpha \leq n)$).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N} \geq 2$) eine beschränkte offene Menge. Wir betrachten das folgende nichtlineare System partieller Differentialgleichungen:

$$D_\alpha A_i^\alpha(x, u, \nabla u) = B_i(x, u, \nabla u) \quad \text{in} \quad \Omega \qquad (i = 1, \ldots, N). \tag{3.1}$$

Die Koeffizienten A_i^α und B_i genügen hierbei den folgenden Wachstumsbedingungen.

$$\begin{cases} |A_i^\alpha(x, u, \xi) - A_i^\alpha(y, v, \xi)| \;\leq\; \omega(|x - y| + |u - v|)(1 + |\xi|^{q-1}) \\ \forall \{x, u\}, \{y, v\} \in \Omega \times \mathbb{R}^N, \forall \xi \in \mathbb{R}^{nN}, \end{cases} \tag{3.2}$$

wobei $\omega : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ eine beschränkte, nichtfallende Funktion bezeichne;

$$
(3.3) \qquad \begin{cases} \xi \mapsto A_i^\alpha(x,u,\xi) \quad \textit{ist differenzierbar auf} \quad \mathbb{R}^{nN} \\ \textit{für alle } \{x,u\} \in \Omega \times \mathbb{R}^N, \\ \{x,u,\xi\} \mapsto \dfrac{\partial A_i^\alpha}{\partial \xi_\beta^j}(x,u,\xi) \textit{ ist stetig auf } \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN}; \end{cases}
$$

$$
(3.4) \qquad \begin{cases} \left| \dfrac{\partial A_i^\alpha}{\partial \xi_\beta^j}(x,u,\xi) \right| \le c_0(1+|\xi|)^{q-2} \\ \forall \{x,u,\xi\} \in \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN} \quad (c_0 = \text{const}) \end{cases}
$$

$(\alpha, \beta = 1, \dots, n; i, j = 1, \dots, N)$;

$$
(3.5) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial A_i^\alpha}{\partial \xi_\beta^j}(x,u,\xi)\eta_\alpha^i \eta_\beta^j \ \ge \ \nu_0(1+|\xi|)^{q-2}|\eta|^2 \\ \forall \{x,u\} \in \Omega \times \mathbb{R}^N, \ \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^{nN} \quad (\nu_0 = \text{const} > 0). \end{cases}
$$

Für die Koeffizienten B_i unterscheiden wir die folgenden zwei Fälle:
a) *Kontrolliertes Wachstum*:

$$
(3.6) \qquad \begin{cases} |B_i(x,u,\xi)| \ \le \ c_1(1+|u|^{q^*-1}+|\xi|^{q-1+q/n}) \ ^{1)} \\ \forall \{x,u,\xi\} \in \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN} \quad (c_1 = \text{const}) \end{cases}
$$

$(i = 1, \dots, N)$.

b) *Natürliches Wachstum*:

$$
(3.7) \qquad \begin{cases} \forall M > 0 \quad \exists a(M) > 0 : \\ |B_i(x,u,\xi)| \ \le \ a(M)|\xi|^q \ + \ b \\ \forall \{x,u,\xi\} \in \Omega \times [-M,M]^N \times \mathbb{R}^{nN} \quad (b = \text{const}) \end{cases}
$$

$(i = 1, \dots, N)$.

Anmerkung 3.1 Kombiniert man (3.2) und (3.4), so folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und Lemma A.4, daß

$$
(3.8) \qquad |A_i^\alpha(x,u,\xi)| \ \le \ c_2(1+|\xi|^{q-1}) \quad \forall \{x,u,\xi\} \in \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN} \quad (c_2 = \text{const}). \qquad \blacksquare
$$

[1] Hierbei sei q^* definiert vermöge $1/q^* := 1/q - 1/n$.

Eine schwache Lösung des nichtlinearen Systems (3.1) sei folgendermaßen definiert.

Definition 3.1 *Seien die Bedingungen* (3.8) *und* (3.6) (*bzw.* (3.7)) *erfüllt. Eine vektorwertige Funktion* $u \in W^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ (*bzw.* $u \in W^{1,q} \cap L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$) *heißt* **schwache Lösung des Systems** (3.1), *falls für beliebige* $\varphi \in C^1_c(\Omega;\mathbb{R}^N)$ *gilt*:

$$\int_\Omega A_i^\alpha(x,u,\nabla u) D_\alpha \varphi^i \, \mathrm{d}x = \int_\Omega B_i(x,u,\nabla u)\varphi^i \, \mathrm{d}x. \tag{3.9}$$ ■

Bemerkungen: 1.) Die Frage nach der Regularität von Lösungen partieller Differentialgeichungen wurde bereits Anfang unseres Jahrhunderts gestellt. D. Hilbert hat diese Frage in einem seiner berühmten Hilbertschen Probleme formuliert und lautet etwa so: In welcher Weise hängt die Glattheit einer Distributionenlösung eines Variationsproblems von der Glattheit ihrer Koeffizienten ab. Zur Beantwortung dieser Frage war bahnbrechend eine Arbeit von De Giorgi (1957) (siehe in [De Giorgi (1957)]), wo bewiesen wurde, daß eine schwache Lösung einer linearen elliptischen partiellen Differentialgleichung mit beschränkten Koeffizienten immer Hölder-stetig ist. Zum gleichen Resultat gelangte J. Moser [Moser (1961)], der zum Teil neue Techniken anwandte, die zur Vereinfachung des Beweises führten. Weiterführende Resultate auf diesem Gebiet beim Studium des quasilinearen Falls erzielten O.A. Ladyzenskaja und N.N. Ural'ceva (vgl. [Ladyzenskaya and Ural'ceva (1968)]).

2.) Daß diese Aussagen für Systeme partieller Differentialgleichungen nicht unbedingt gelten müssen, lehren uns die zahlreichen Gegenbeispiele (vgl. in [Giaquinta (1983)]). Unser Ziel besteht nun darin, zumindest **partielle Hölder-Setigkeit** schwacher Lösung nachzuweisen. Das Konzept der *partiellen Regularität*, basiert auf einer Idee von C.B. Morrey (vgl. [Morrey (1968)]). Hierbei nennt man eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ partiell Hölder-stetig zum Exponenten γ, $0 < \gamma \le 1$, falls es eine abgeschlossene Menge $\Sigma \subset \Omega$ mit $\mathrm{mes}(\Sigma) = 0$ (die sogenannte *Singulärmenge*) gibt, so daß

$$u\big|_{\Omega\setminus\Sigma} \in C^{0,\gamma}(\Omega \setminus \Sigma;\mathbb{R}^N).$$

Außerdem ist man daran interessiert, die Größe der Menge Σ genauer zu charakterisieren, indem man die Hausdorff-Dimension dieser Menge abschätzt. Mit anderen Worten, wir suchen das Minimum derjenigen Zahlen $0 < \sigma \le n$ für die $\mathcal{H}_\sigma(\Sigma) = 0$ [2)] gilt. Diese Zahl heißt dann auch die Hausdorff-Dimension der Menge Σ.

3.) Unter zusätzlichen Voraussetzungen an die Struktur der Koeffizienten A_i^α konnte in [Koshelev (1978), Uhlenbeck (1977)] die Hölder-Setigkeit von u bewiesen werden. Weitere Resultate hierzu sind außerdem bekannt, falls u ein Minimalelement ist, d.h. falls das System (3.1) als Eulersche Gleichung aufgefaßt werden kann (vgl. E. Acerbi, N. Fusco, [Acerbi and Fusco (1989)]).

[2)] Hier bezeichne $\mathcal{H}_\sigma$ das äußere Hausdorff-Maß bezüglich des Exponenten σ (siehe in [Giusti (1969)]).

Bei der Untersuchung der oben erwähnten Gegenbeispiele fällt uns allerdings auf, daß die Dimension n jeweils größer oder gleich 4 gewählt werden mußte, was die Vermutung nahelegt, daß in Fällen $n \leq 3$ eventuell volle Regularität der schwachen Lösung vorliegt. Tatsächlich wurde ein solches Resultat von S. Campanato in [Campanato (1982)] für schwache Lösungen $u \in W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ des Systems (3.1) im Fall des *kontrollierten Wachstums* bewiesen, unter der Voraussetzung, daß die Koeffizienten A_i^α nicht von $u \in \mathbb{R}^N$ abhängen, während der Autor für die anderen Fälle nur partielle Hölder-Setigkeit der schwachen Lösung zeigt.

In diesem Kapitel werden wir Campanatos Resultat verallgemeinern und beweisen die partielle Stetigkeit des Gradienten einer schwacher Lösungen von (3.1) im Fall des *kontrollierten Wachstums* für beliebige Dimensionen n. Gleichzeitig werden wir partielle Hölder-Setigkeit des Gradienten von u beweisen, falls die Koeffizienten A_i^α bezüglich der Variablen x und u Hölder-stetig sind.

Im Abschnitt 3.3 werden wir zusätzlich den Fall des *natürliches Wachstums* untersuchen und unter der Einschränkung $q > 2n/(n+2)$ partielle Stetigkeit des Gradienten der schwachen Lösung beweisen. ■

Wir beginnen mit einigen Bezeichnungen, um die nachfolgenden Betrachtungen übersichtlicher zu gestalten. Sei $u \in W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Für $x_0 \in \Omega$ und $0 < R < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ setzen wir:

$$\Phi(u; x_0, R) := \left(\fint_{B_R(x_0)} |\nabla u \,-\, (\nabla u)_{B_R(x_0)}|^q \, \mathrm{d}x \right)^{1/q},$$

$$\mathcal{M}(u; x_0, R) := |u_{B_R(x_0)}|^{q^*/q} \,+\, \left(\fint_{B_R(x_0)} (1 + |\nabla u|^q) \, \mathrm{d}x \right)^{1/q}.$$

Die folgende Definition liefert ein hinreichendes Kriterium für partielle Regulariät (siehe unten Satz 3.1).

Definition 3.2 *Sei* $\omega_0 : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *eine nichtfallende Funktion, die außerdem der Dini-Bedingung*

$$\int_0^1 \frac{\omega_0(t)}{t} \, \mathrm{d}t \,<\, +\infty \tag{3.10}$$

genüge. Wir sagen, eine Funktion $u \in W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ *erfüllt die* **allgemeine partielle Regularitätseigenschaft bezüglich** $\boldsymbol{\omega}_0$, *falls es positive Konstanten* δ *und* τ $(0 < \tau < \frac{1}{2})$ *gibt, so daß die folgende Bedingung gilt*:

Für jedes $M > 0$ *existieren positive Konstanten* $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(M)$ *und* $R_1 = R_1(M)$, *so daß*

$$\Phi(u; x_0, \tau R) \,\leq\, \sqrt{\tau}\Phi(u; x_0, R) \,+\, \omega_0(R) M^\delta \tag{3.11}$$

für all diejenigen $x_0 \in \Omega$ *und* $0 < R < \min\{\text{dist}(x_0, \partial\Omega), R_1\}$ *mit*

$$\Phi(u; x_0, R) \le \varepsilon_1, \quad \mathcal{M}(u; x_0, R) \le M. \tag{3.12}$$ ■

Der nächste Satz beinhaltet eine allgemeine Regularitätsaussage für Funktionen, die einer geeigneten strukturellen Bedingung gemäß Definition 3.2 genügen.

Satz 3.1 *Sei* $\omega_0 : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *eine nichtfallende Funktion, die der Bedingung* (3.10) *genüge. Sei* $u \in W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ $(1 < q < +\infty)$ *eine Funktion, welche die allgemeine partielle Regularitätseigenschaft bezüglich* ω_0 *erfüllt* (*siehe Definition 3.2*).
a) *Dann gibt es eine offene Menge* $\Omega_0 \subset \Omega$ *mit* $\text{mes}(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$, *so daß*

$$u|_{\Omega_0} \in C^1(\Omega_0; \qquad R^N). \tag{3.13}$$

b) *Existiert außerdem eine Zahl* $0 < \mu < 1$ *und eine positive Konstante* L, *so daß* $\omega_0(t) \le L\, t^\mu$ *für alle* $t \in (0, 1)$, *so gibt es eine offene Menge* $\Omega_0 \subset \Omega$ *mit* $\text{mes}(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$ *und*

$$\nabla u|_{\Omega_0} \in C^{0,\gamma}(\Omega_0; \mathbb{R}^{nN}) \quad \textit{für ein } \gamma \in (0, \mu). \tag{3.14}$$

Beweis. - a) Sei $u \in W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ $(1 < q < +\infty)$ eine Funktion, welche der allgemeinen partiellen Regularitätseigenschaft gemäß Definition 3.2 genügt. Die Singulärmenge Σ sei definiert durch

$$\Sigma := \Big\{ x_0 \in \Omega \;\Big|\; \liminf_{R \to 0^+} \Phi(u; x_0, R) > 0 \Big\} \cup \Big\{ x_0 \in \Omega \;\Big|\; \sup_{R > 0} \mathcal{M}(u; x_0, R) = +\infty \Big\}.$$

Sei $x_0 \in \Omega \setminus \Sigma$ beliebig gewählt. Dann setzen wir

$$M := 3 \sup_{R>0} \mathcal{M}(u; x_0, R) < +\infty. \tag{3.15}$$

Nun bezeichnen $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(M)$ und $R_1 = R_1(M)$ die Zahlen aus Definition 3.2. Überdies sei λ_0 die positive Konstante aus (a.10) (vgl. Lemma A.5). Aufgrund von (3.10) und der Voraussetzung $x_0 \notin \Sigma$ findet man eine Zahl R_2, $0 < R_2 < \min\{\text{dist}(x_0, \partial\Omega), R_1\}$, so daß

$$\Phi(u; x_0, R_2) + \frac{\omega_0(R_2) M^\delta}{\sqrt{\tau} - \tau} < \varepsilon_1; \tag{3.16}$$

$$\Phi(u; x_0, R_2) + \frac{M^\delta}{\sqrt{\tau}} \left(\frac{1}{1-\tau} \int_0^{R_2} \frac{\omega_0(t)}{t}\, \mathrm{d}t + \omega_0(R_2) \right) < \frac{M(1-\sqrt{\tau})}{2\lambda_0}. \tag{3.17}$$

Wegen der Absolutstetigkeit des Lebesgue-Integrals gibt es eine Zahl $0 < r_{x_0} < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega) - R_2$, so daß für jedes $y \in B_{r_{x_0}}(x_0)$:

$$\Phi(u; y, R_2) + \frac{\omega_0(R_2) M^\delta}{\sqrt{\tau} - \tau} \leq \varepsilon_1; \tag{3.18}$$

$$\mathcal{M}(u; y, R_2) \leq \frac{M}{2}; \tag{3.19}$$

$$\Phi(u; y, R_2) + \frac{M^\delta}{\sqrt{\tau}} \left(\frac{1}{1-\tau} \int_0^{R_2} \frac{\omega_0(t)}{t} \,\mathrm{d}t + \omega_0(R_2) \right) \leq \frac{M(1-\sqrt{\tau})}{2\lambda_0}. \tag{3.20}$$

Nun sei $y \in B_{r_{x_0}}(x_0)$ beliebig fixiert. Für $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ setzen wir

$$\begin{aligned} \phi_m &:= \phi_m(y) = \Phi(u; y, \tau^m R_2), \\ \mathcal{M}_m &:= \mathcal{M}_m(y) = \mathcal{M}(u; y, \tau^m R_2), \\ s_m &:= \frac{M^\delta}{\sqrt{\tau}} \omega_0(\tau^m R_2). \end{aligned}$$

Als nächstes zeigen wir, daß die Folgen $(\phi_m), (\mathcal{M}_m)$ und (s_m) den Voraussetzungen (E1)-(E5) von Lemma A.8 genügen:

Sei $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, so daß $\phi_m \leq \varepsilon_1$ und $\mathcal{M}_m \leq M$. Dann folgt gemäß (3.11) (vgl. Definition 3.2)

$$\phi_{m+1} \leq \sqrt{\tau}(\phi_m + s_m),$$

also (E1). Die Bedingung (E2) verifiziert man sofort unter Verwendung von (a.10) (siehe Lemma A.5). Die Voraussetzung (E3) folgt unmittelbar aus (3.18), während (E4) wegen (3.19) erfüllt ist. Mit Hilfe von Lemma A.9 erhält man

$$\mathcal{S} = \sum_{m=0}^{\infty} s_m \leq \frac{M^\delta}{\sqrt{\tau}} \left(\frac{1}{1-\tau} \int_0^{R_2} \frac{\omega_0(t)}{t} dt + \omega_0(R_2) \right).$$

Somit ergibt sich nach (3.20)

$$\phi_0 + \mathcal{S} \leq \frac{M(1-\sqrt{\tau})}{2\lambda_0},$$

was schließlich die Voraussetzung (E5) impliziert.

Nun sind wir in der Lage das Lemma A.8 anzuwenden und erhalten

$$(3.21) \qquad \phi_m \leq \tau^{m/2}\phi_0 + \sum_{k=0}^{m-1} \tau^{(m-k)/2} s_k \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Aus (3.21) folgt nun standardgemäß:

$$(3.22) \qquad \Phi(u; y, \sigma) \leq c(n, q, \tau, \varepsilon_1)\, \omega_1(\sigma) \quad \forall\, 0 < \sigma \leq R_2,$$

wobei die Funktion ω_1 definiert ist vermöge

$$\omega_1(\sigma) := \begin{cases} \tau^{m/2} + \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \tau^{(m-k)/2} s_k & \text{für} \quad \sigma \in (\tau^m R_2, \tau^{m-1} R_2] \quad (m \in \mathbb{N}) \\ \varepsilon_1 + s_0 \quad \text{für} \quad \sigma > R_2. \end{cases}$$

Wie man sich außerdem leicht klarmacht, gilt:

$$\int_0^1 \frac{\omega_1(t)}{t}\, \mathrm{d}t < +\infty.$$

Da die Konstante in (3.22) weder von y noch von σ abhängt, haben wir

$$\nabla u\big|_{B_{r_{x_0}}(x_0)} \in \mathfrak{L}^{q,\,n}_{(\omega_1)}(B_{r_{x_0}}(x_0); \mathbb{R}^{nN}),$$ [3)]

und nach Anwendung von Satz A.1 folgt

$$(3.23) \qquad \nabla u\big|_{B_{r_{x_0}}(x_0)} \in C(\overline{B_{r_{x_0}}(x_0)}; \mathbb{R}^{nN}).$$

Die gesuchte Menge Ω_0, die der Anforderung des Satzes genügt, erhält man durch Vereinigung aller offenen Kugeln $B_{r_{x_0}}(x_0)$ $(x_0 \in \Omega \setminus \Sigma)$, für die (3.23) erfüllt ist. Da Ω_0 die Menge der Lebesgue-Punkte von ∇u umfaßt, gilt $\mathrm{mes}(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$.

2° Wir nehmen nun zusätzlich an, daß $\omega_0(t) \leq L\, t^\mu$ für alle $0 < t < 1$ $(L = \mathrm{const})$ für ein $0 < \mu < 1$. Sei $x_0 \in \Omega' \setminus \Sigma$ $(\Omega' \subset\subset \Omega)$. Unter Beibehaltung der oben eingeführten Bezeichnungen erhält man mit der gleichen Argumentation wie in 1° mit Hilfe von Lemma A.8

$$\begin{aligned} \phi_m &\leq \tau^{m/2}\phi_0 + L \sum_{k=0}^{m-1} \tau^{(m-k)/2} s_k \leq \\ &\leq \tau^{m\mu}\left(\phi_0 + \frac{L\, R_2^\mu M^\delta}{\tau^{\mu+1/2}}\right) \sum_{k=1}^{m} \tau^{k(1/2-\mu)} \end{aligned}$$

[3)] Zur Definition des Raumes $\mathfrak{L}^{q,\,n}_{(\omega_1)}(\Omega)$ siehe Definition A.1.

($m \in \mathbb{N}$). Elementar folgert man hieraus die Abschätzung

$$\Phi(u; y, \sigma) \le c(\varepsilon_1, M, L, \tau, \mu)\left(\frac{\sigma}{R_2}\right)^{\mu} \qquad \forall\, 0 < \sigma \le R_2, \quad (y \in B_{r_{x_0}}(x_0)).$$

Unter Verwendung Campanatos Resultat in [Campanato (1963)] folgern wir hieraus:

$$\nabla u\big|_{B_{r_{x_0}}(x_0)} \in C^{0,\mu}(\overline{B_{r_{x_0}}(x_0)}; \mathbb{R}^{nN}). \tag{3.24}$$

Wie oben können wir Ω_0 als Vereinigung aller offenen Kugeln $B_{r_{x_0}}(x_0)$, für die (3.24) gilt, definieren. Der Beweis des Satzes ist somit vollständig erbracht. ∎

3.2 Der Fall des kontrollierten Wachstums

Im vorliegenden Abschnitt untersuchen wir schwache Lösungen des Systems (3.1) bei *kontrolliertem Wachstum*. Unser Hauptresultat ist hierbei der

Satz 3.2 *Seien die Bedingungen (3.2)–(3.6) erfüllt. Sei* $u \in W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ *eine schwache Lösung des Systems (3.1).*
(i) *Genügt der Stetigkeitsmodul* ω *der Koeffizienten* A_i^α ($\alpha = 1, \dots, n; i = 1, \dots, N$) *bezüglich* $\{x, u\} \in \Omega \times \mathbb{R}^N$ *(vgl. (3.2)) außerdem der Dini-Bedingung*:

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t}\, \mathrm{d}t < +\infty, \tag{3.25}$$

so existiert eine offene Menge $\Omega_0 \subset \Omega$ *mit* $\mathrm{mes}(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$, *derart daß*

$$u\big|_{\Omega_0} \in C^1(\Omega_0; \qquad\qquad R^N). \tag{3.26}$$

(ii) *Genügt der Stetigkeitsmodul* ω *zusätzlich der Bedingung*

$$\omega(t) \le L \min\{t^\theta, 1\} \quad \forall\, t \in (0, +\infty), \tag{3.27}$$

($L = \mathrm{const};\ 0 < \theta < 1$), *so existiert eine offene Menge* $\Omega_0 \subset \Omega$ *mit* $\mathrm{mes}(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$ *und*

$$\nabla u\big|_{\Omega_0} \in C^{0,\gamma}(\Omega_0; \mathbb{R}^{nN}) \quad \textit{für ein} \quad 0 < \gamma < 1. \tag{3.28}$$

Beim Beweis von Satz 3.2 machen wir von den folgenden zwei Lemmas Gebrauch. Wir beginnen mit einem in der Literatur bekannten Resultat höherer Integrierbarkeit, welches auf einer Idee von Gehring (vgl. [Gehring (1973)]) und Giaquinta-Modica (vgl. [Giaquinta and Modica (1979a), Giaquinta (1983)]) beruht.

Lemma 3.1 *Seien die Bedingungen* (3.4)–(3.6) *und* (3.8) *erfüllt. Sei* $u \in W^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ *eine schwache Lösung des Systems* (3.1). *Dann gibt es eine Zahl* $r > 1$ *derart, daß* $\nabla u \in L^{rq}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^{nN})$. *Ferner existiert eine positive Zahl* R_0, *so daß für jedes Paar konzentrischer Kugeln* $B_{R/2} \subset\subset B_R \subset \Omega$ $(0 < R < R_0)$ *gilt:*

$$(3.29)\qquad \left(\fint_{B_{R/2}} (1 + |u|^{q^*/q} + |\nabla u|)^{rq}\,\mathrm{d}x\right)^{1/r} \le c \fint_{B_R} (1 + |u|^{q^*} + |\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x,$$

wobei $c = \mathrm{const}$ *nur von* $c_0/\nu_0, c_1, c_2, q, n, N$ *und* u *abhängt.*
(Den vollständigen Beweis findet man in Campanato, [Campanato (1982)]). ■

Dem nächsten Lemma sei die folgende Bemerkung vorangestellt:

Anmerkung 3.2 Seien $x_0 \in \Omega$ und $0 < R < \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)$ gegeben. Dann existiert für jedes $u \in W^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ genau eine schwache Lösung $v \in W^{1,q}(B_{R/2};\mathbb{R}^N)$ des folgenden Dirichlet-Problems:

$$(3.30)\qquad D_\alpha A_i^\alpha(x_0, u_{B_R}, \nabla v) = 0 \quad \text{in} \quad B_{R/2} \qquad (i = 1,\ldots,N)$$

$$(3.31)\qquad v = u \quad \text{f.ü. auf} \quad \partial B_{R/2}. \qquad ■$$

In den nachfolgenden Betrachtungen sei $0 < \tau < \frac{1}{2}$, so gewählt daß

$$(3.32)\qquad 2^{n+3} A\sqrt{\tau} \le 1.\ ^{4)}$$

Nun gilt das folgende

Lemma 3.2 *Seien die Bedingungen* (3.2)–(3.6) *erfüllt. Sei* $u \in W^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ *eine schwache Lösung des Systems* (3.1). *Ferner, sei* $\Omega' \subset\subset \Omega$ *eine beliebige fixierte offene Menge.*

a) *Es existiert eine Konstante* K_1, *die nur von* $c_0/\nu_0, c_1, c_2, q, n, N$ *und* Ω' *abhängt sowie eine Konstante* $1 < r < +\infty\,(r' \ge n/q')$, *so daß für beliebige* $x_0 \in \Omega'$ *und* $0 < R < \min\{\mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega'), 1\}$ *gilt:*

$$(3.33)\qquad \left(\fint_{B_{R/2}} |\nabla u - \nabla v|^q\,\mathrm{d}x\right)^{1/q} \le K_1\Big(\omega(2\sqrt{R}) + R^{\frac{q}{2q'r'}}\Big)\mathcal{M}(u; x_0, R)^{1+1/r'},$$

[4] Hier bezeichne A die positive Konstante in (1.30).

wobei $v \in W^{1,q}(B_{R/2};\mathbb{R}^N)$ *die schwache Lösung des Dirichlet-Problems* (3.30), (3.31) *bezeichne.*

b) *Für jedes* $M > 0$ *gibt es positive Zahlen* $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(M)$ *und* $R_1 = R_1(M)$ *mit der folgenden Eigenschaft:*
Seien $x_0 \in \Omega'$ *und* $0 < R < \min\{\mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega'), R_1\}$, *so daß*

$$\Phi(u; x_0, R) \le \varepsilon_1 \quad \textit{und} \quad \mathcal{M}(u; x_0, R) \le M, \tag{3.34}$$

dann haben wir die Abschätzung:

$$\Phi(u; x_0, \tau R) \le \sqrt{\tau}\,\Phi(u; x_0, R) + \omega_0(R) M^{1+1/r'}, \tag{3.35}$$

wobei

$$\omega_0(R) := K_1(1 + \tau^{-n})(\omega(2\sqrt{R}) + R^{\frac{q}{2q'r'}}).$$

Beweis. - 1° Sei $\Omega' \subset\subset \Omega$ eine beliebig gewählte offene Menge und seien $x_0 \in \Omega'$, $0 < R < \min\{\mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega'), 1\}$. Sei $v \in W^{1,q}(B_{R/2};\mathbb{R}^N)$ die schwache Lösung des Dirichlet-Problems (3.30), (3.31). Also gilt

$$\int_{B_{R/2}} A_i^\alpha(x_0, u_{B_R}, \nabla v) D_\alpha \varphi^i \,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall\, \varphi \in W_\circ^{1,q}(B_{R/2};\mathbb{R}^N). \tag{3.36}$$

Nun setzen wir $w := u - v$. Kombiniert man (3.9) und (3.36), so sieht man, daß für beliebige $\varphi \in W_\circ^{1,q}(B_{R/2};\mathbb{R}^N)$ die folgende Identität erfüllt ist

$$\begin{aligned} &\int_{B_{R/2}} A_{ij}^{\alpha\beta} D_\beta w^j D_\alpha \varphi^i \,\mathrm{d}x = \\ &= \int_{B_{R/2}} \Big(A_i^\alpha(x_0, u_{B_R}, \nabla u) - A_i^\alpha(x, u, \nabla u) \Big) D_\alpha \varphi^i \,\mathrm{d}x + \\ &\qquad + \int_{B_{R/2}} B_i(x, u, \nabla u) \varphi^i \,\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{3.37}$$

wobei

$$A_{ij}^{\alpha\beta}(x) := \int_0^1 \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial \xi_\beta^j}(x_0, u_{B_R}, \nabla u(x) - (1-t)\nabla w(x)) \,\mathrm{d}t \quad (x \in B_{R/2}).$$

Da $w \in W_\circ^{1,q}(B_{R/2};\mathbb{R}^N)$ eine für (3.37) zulässige Testfunktion ist, folgt unter Beachtung von (3.2), (3.5) und (3.6) zusammen mit Lemma A.4

$$\nu_0 \int_{B_{R/2}} (1+|\nabla u|+|\nabla w|)^{q-2}|\nabla w|^2\,\mathrm{d}x \;\leq$$

$$\leq \int_{B_{R/2}} \omega(R+|u-u_{B_R}|)(1+|\nabla u|)^{q-1}|\nabla w|^q\,\mathrm{d}x + \tag{3.38}$$

$$+\,c_1 \int_{B_{R/2}} (1+|u|^{q^*-1}+|\nabla u|^{q-1+q/n})|w|\,\mathrm{d}x \;=\; I_1 \;+\; I_2.$$

(i) Um I_1 abzuschätzen, benutzen wir die Höldersche Ungleichung und höhere Integrierbarkeit von ∇u (siehe Lemma 3.1). Hieraus folgern wir:

$$I_1 \leq c\bigg(\fint_{B_R} \omega(...)^{q'r'}\,\mathrm{d}x\bigg)^{1/r'q'} \times$$

$$\times\bigg(\int_{B_R} (1+|u|^{q^*/q}+|\nabla u|)^q\,\mathrm{d}x\bigg)^{1/q'}\bigg(\int_{B_{R/2}} |\nabla w|^q\,\mathrm{d}x\bigg)^{1/q}.$$

Unter Verwendung von Lemma A.10 findet man

$$\bigg(\fint_{B_R} \omega_0^{q'r'}(...)\,\mathrm{d}x\bigg)^{1/r'q'} \;\leq\; \mathcal{O}(x_0,R), \tag{3.39}$$

wobei

$$\mathcal{O}(x_0,R) \;:=\; \omega(2\sqrt{R}) \;+\; K_0 R^{\frac{q}{2q'r'}}\mathcal{M}(u;x_0,R)^{\frac{q}{q'r'}},$$

und $K_0 = \mathrm{const}$ nur von n, q, N und von $\sup\limits_{t\geq 0}\omega(t)$ abhängt.

Kombiniert man die letzten beiden Abschätzungen, so erhält man

$$I_1 \;\leq\; c\,\mathcal{O}(x_0,R)\bigg(\int_{B_R} (1+|u|^{q^*/q}+|\nabla u|)^q\,\mathrm{d}x\bigg)^{1/q'}\bigg(\int_{B_{R/2}} |\nabla w|^q\,\mathrm{d}x\bigg)^{1/q}.$$

(ii) Für die Abschätzung des zweiten Integrals verwenden wir die Höldersche Ungleichung und die Poincaré-Ungleichung. Hiermit bestätigt man

$$I_2 \;\leq\; c\,\bigg(\int_{B_R} (1+|u|^{q^*/q}+|\nabla u|)^q\,\mathrm{d}x\bigg)^{(q^*-1)/q^*}\bigg(\int_{B_{R/2}} |\nabla w|^q\,\mathrm{d}x\bigg)^{1/q}.$$

Beachtet man außerdem

$$\frac{q^*-1}{q^*} = \frac{1}{q'} + \frac{1}{n}, \qquad \frac{1}{n} \geq \frac{1}{q'r'},$$

so folgt unter Berücksichtigung der Abschätzung (a.9) (vgl. Lemma A.5)

$$\begin{aligned} I_2 \;&\leq\; c\,R\,\mathcal{M}(u;x_0,R)^{q/n}\Big(\int_{B_R}(1+|u|^{q^*/q}+|\nabla u|)^q\,\mathrm{d}x\Big)^{1/q'}\Big(\int_{B_{R/2}}|\nabla w|^q\,\mathrm{d}x\Big)^{1/q} \;\leq \\ &\leq\; c\,\mathcal{O}(x_0,R)\Big(\int_{B_R}(1+|u|^{q^*/q}+|\nabla u|)^q\,\mathrm{d}x\Big)^{1/q'}\Big(\int_{B_{R/2}}|\nabla w|^q\,\mathrm{d}x\Big)^{1/q}. \end{aligned}$$

Setzt man in (3.38) die Abschätzungen von I_1 und I_2 ein, so folgt

$$\begin{aligned} &\int_{B_{R/2}}(1+|\nabla u|+|\nabla w|)^{q-2}|\nabla w|^2\,\mathrm{d}x \;\leq \\ &\qquad\leq\; c\,\mathcal{O}(x_0,R)\Big(\int_{B_R}(1+|u|^{q^*/q}+|\nabla u|)^q\,\mathrm{d}x\Big)^{1/q'}\Big(\int_{B_{R/2}}|\nabla w|^q\,\mathrm{d}x\Big)^{1/q}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Zusätzlich verifiziert man unter Benutzung der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned} &\int_{B_{R/2}}|\nabla w|^q\,\mathrm{d}x \;\leq \\ &\leq\; c\Big(\int_{B_R}(1+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\Big)^{(2-q)/2}\Big(\int_{B_{R/2}}(1+|\nabla u|+|\nabla w|)^{q-2}|\nabla w|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{q/2} + \\ &\quad+c\Big(\int_{B_{R/2}}|\nabla w|^q\,\mathrm{d}x\Big)^{(2-q)/2}\Big(\int_{B_{R/2}}(1+|\nabla u|+|\nabla w|)^{q-2}|\nabla w|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{q/2}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Kombiniert man die Ungleichungen (3.40) und (3.41), so folgt

$$\begin{aligned} \int_{B_{R/2}}|\nabla w|^q\,\mathrm{d}x \;&\leq\; c\,\mathcal{O}(x_0,R)^{q/2}\times \\ &\times\Big\{\Big(\int_{B_R}(1+|u|^{q*/q}+|\nabla u|)^q\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\Big(\int_{B_{R/2}}|\nabla w|^q\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2} + \\ &\quad+\Big(\int_{B_R}(1+|u|^{q*/q}+|\nabla u|)^q\,\mathrm{d}x\Big)^{(q-1)/2}\Big(\int_{B_{R/2}}|\nabla w|^q\,\mathrm{d}x\Big)^{(3-q)/2}\Big\}. \end{aligned}$$

Schließlich findet man nach Anwendung der Hölderschen und der Youngschen Ungleichung sowie der Abschätzung (a.9):

$$\left(\fint_{B_{R/2}} |\nabla w|^q \,\mathrm{d}x\right)^{1/q} \leq$$
$$\leq c\Big(\mathcal{O}(x_0,R) + \mathcal{O}(x_0,R)^{q'/q}\Big)\left(\fint_{B_R} (1+|u|^{q*/q}+|\nabla u|)^q \,\mathrm{d}x\right)^{1/q} \leq$$
$$\leq K_1\Big(\omega(2\sqrt{R}) + R^{\frac{q}{2q'r'}}\Big)\mathcal{M}(u;x_0,R)^{1+1/r'},$$

womit die erste Abschätzung (3.33) gezeigt ist.

b) Sei $M > 0$ beliebig fixiert. Wir setzen

$$\varepsilon_1(M) := 2^{-(n+2)}\varepsilon_0(2\tau, 2^n M),$$

wobei ε_0 die positive Konstante aus Satz 1.2 bezeichne. Dann wählen wir $R_1 = R_1(M)$, so daß

$$K_1\Big(\omega(2\sqrt{R}) + R^{\frac{q}{2q'r'}}\Big)M^{1+1/r'} \leq \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{3.42}$$

Seien $x_0 \in \Omega'$ und $0 < R < \min\{\mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega'), R_1\}$, derart daß die Bedingung (3.34) erfüllt ist. Sei nun $v \in W^{1,q}(B_{R/2}; R^N)$ die schwache Lösung des Dirichlet-Problems (3.30), (3.31). Nach Anwendung der Dreiecksungleichung, der Abschätzung (3.33) und (3.42) bekommt man

$$\Phi(v;x_0,R/2) \leq 2^{n+1}\Phi(u;x_0,R) + K_1\Big(\omega(2\sqrt{R}) + R^{\frac{q}{2q'r'}}\Big)M^{1+1/r'} \leq \varepsilon_0. \tag{3.43}$$

Überdies verifiziert man leicht unter Beachtung von (3.34)

$$|(\nabla v)_{B_{R/2}}| = |(\nabla u)_{B_{R/2}}| \leq 2^{n/q}\mathcal{M}(u;x_0,R) \leq 2^n M, \tag{3.44}$$

$$|u_{B_R}| \leq \max\Big\{1, |u_{B_R}|^{q^*/q}\Big\} \leq \mathcal{M}(u;x_0,R) \leq M. \tag{3.45}$$

Mit (3.43), (3.44) und (3.45) sind wir in der Lage, den Satz 1.2 anzuwenden, indem wir dort τ durch 2τ und M durch $2^n M$ ersetzen. Somit erhält man unter Berücksichtigung von (3.32) nach Anwendung der Dreiecksungleichung, der Ungleichung (1.30) und (3.33)

$$\begin{aligned}\Phi(u;x_0,\tau R) &\leq \Phi(v;x_0,\tau R) + \left(\fint_{B_{\tau R}} |\nabla w - (\nabla w)_{B_{\tau R}}|^q \,\mathrm{d}x\right)^{1/q} \leq \\ &\leq 4\tau A\Phi(v;x_0,R/2) + \tau^{-n}\left(\fint_{B_{R/2}} |\nabla w|^q \,\mathrm{d}x\right)^{1/q} \leq \\ &\leq 2^{3+n}\tau A\Phi(u;x_0,R) + (1+\tau^{-n})\left(\fint_{B_{R/2}} |\nabla w|^q \,\mathrm{d}x\right)^{1/q} \leq \\ &\leq \sqrt{\tau}\Phi(u;x_0,R) + K_1(1+\tau^{-n})\Big(\omega(2\sqrt{R}) + R^{\frac{q}{2q'r'}}\Big)M^{1+1/r'},\end{aligned}$$

was auch die Behauptung b) von Lemma 3.2 beweist. ■

Beweis von Satz 3.2 - Sei $0 < \tau < \dfrac{1}{2}$ so gewählt, daß (3.32) erfüllt ist. Dann setzen wir:

$$\begin{aligned}\delta &:= 1 + \frac{1}{r'},\\ \omega_0(R) &:= K_1(1+\tau^{-n})(\omega(2\sqrt{R}) + R^{\frac{q}{2q'r'}}) \quad (R>0).\end{aligned}$$

1° Zunächst nehmen wir an, daß die Funktion ω aus (3.2) der Dini-Bedingung (3.25) genügt. Aus Lemma A.9, (i) schließt man

$$\int_0^1 \frac{\omega_0(t)}{t}\,\mathrm{d}t < +\infty. \tag{3.46}$$

und zusammen mit Lemma 3.2 b) ist klar, daß u der allgemeinen partiellen Regularitätseigenschaft gemäß Definition 3.1 genügt. Die Behauptung (i) des Satzes folgt nun unmittelbar aus Satz 3.1, a).

2° Nimmt man außerdem an, daß ω aus (3.2) der Bedingung (3.27) genügt, so ergibt sich elementar

$$\omega_0(t) \leq c' t^\mu \qquad \Big(\mu := \min\Big\{\frac{\theta}{2}, \frac{q}{2q'r'}\Big\}; c' = \text{const} > 0\Big),$$

und die Behauptung (ii) des Satzes ergibt sich aus Satz 3.1, b). ■

3.3 Der Fall des natürlichen Wachstums

Mit der gleichen Methode wie im Fall des *kontrollierten Wachstums* (vgl. Abschnitt 3.2) erhalten wir auch im Fall des *natürlichen Wachstums* partielle Stetigkeit (bzw. partielle

Hölder-Stetigkeit) des Gradienten der schwachen Lösung u des Systems (3.1). Hierbei unterscheiden wir die folgenden zwei Fälle:

1) *Der Fall* $n \leq 3$: Hier verwenden wir die Methode des „*Einfrierens der Koeffizienten*“ und benutzen die L^∞-a-priori-Abschätzung (2.65) aus Satz 2.4 (vgl. Abschnitt 2.3).

2) *Der Fall* $n \geq 4$: In diesem Fall ist es nicht möglich, die oben erwähnte Methode anzuwenden. Es gelingt uns jedoch, unter der zusätzlichen Voraussetzung $q > 2n/(n+2)$ und Anwendung der sogenannten *indirekten Methode*, ein analoges Resultat partieller Regularität schwacher Lösungen $u \in W^{1,q} \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$ des Systems (3.1) zu beweisen. Das Hauptresultat dieses Abschnittes ist der folgende

Satz 3.3 *Seien die Bedingungen* (3.2)–(3.5) *und* (3.7) *erfüllt. Ferner sei*

$$2 \leq n \leq \max\Big\{3, \frac{2q}{2-q}\Big\}. \tag{3.47}$$

Sei $u \in W^{1,q} \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$ *eine schwache Lösung des Systems* (3.1), *die der folgenden Kleinheitsforderung genüge*:

$$2a(K)K < \nu_0 \qquad (K := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|). \tag{3.48}$$

(i) *Genügt der Stetigkeitsmodul* ω *in* (3.2) *der Bedingung* (3.25), *so existiert eine offene Menge* $\Omega_0 \subset \Omega$ *mit* $\operatorname{mes}(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$ *und*

$$u\big|_{\Omega_0} \in C^1(\Omega_0; \mathbb{R}^N). \tag{3.49}$$

(ii) *Genügt* ω *der Bedingung* (3.27), *so existiert eine offene Menge* $\Omega_0 \subset \Omega$ *mit* $\operatorname{mes}(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$ *und*

$$\nabla u\big|_{\Omega_0} \in \mathrm{C}^{0,\gamma}(\Omega_0; \mathbb{R}^{nN}) \quad \textit{für ein } 0 < \gamma < 1. \tag{3.50}$$

Dem Beweis von Satz 3.3 stellen wir einige Lemmas voran. Wie im Fall des *kontrollierten Wachstums* erhält man auch hier ein analoges Resultat höherer Integrierbarkeit nach der bekannten Methode von Gehring-Giaquinta-Modica (vgl. in [Gehring (1973), Giaquinta and Modica (1979a)]).

Lemma 3.3 *Seien* (3.4), (3.7) *und* (3.8) *erfüllt. Sei* $u \in W^{1,q} \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$ *eine schwache Lösung des Systems* (3.1), *die außerdem der Kleinheitsbedingung* (3.48) *genügt. Dann gibt es eine Zahl* $r > 1$ *derart, daß* $\nabla u \in L^{rq}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^{nN})$. *Ferner existiert eine positive Zahl* R_0, *so daß für jedes Paar konzentrischer Kugeln* $B_{R/2} \subset B_R \subset \Omega$ $(0 < R < R_0)$ *gilt*:

$$\left(\fint_{B_{R/2}} (1 + |\nabla u|)^{rq}\, \mathrm{d}x\right)^{1/r} \leq c \fint_{B_R} (1 + |\nabla u|^q)\, \mathrm{d}x, \tag{3.51}$$

wobei $c = \text{const} > 0$ *nur von* $c_0/\nu_0, c_2, a, b, n, N, q,$ *und* u *abhängt.*

(Der Beweis von Lemma 3.3 verläuft analog wie der von Lemma 3.1 (siehe [Campanato (1986)]).) ■

Als nächstes leiten wir eine Morrey-Raum-Eigenschaft her. Dazu das folgende

Lemma 3.4 *Seien* (3.4), (3.7) *und* (3.8) *erfüllt. Sei* $u \in W^{1,q} \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$ *eine schwache Lösung des Systems* (3.1) *mit* (3.48). *Sei* $\Omega' \subset\subset \Omega$ *eine beliebige offene Menge. Dann gibt es eine positive Konstante* $c = c(c_0/\nu_0, c_2, a, b, q, n, N, u, 1/\operatorname{dist}(\Omega', \Omega))$, *so daß für alle* $x_0 \in \Omega'$ *und* $0 < R < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$:

$$u \in W^{1,q(n-q)}(B_R; \mathbb{R}^N),$$

$$\|\nabla u\|_{L^{q,\,n-q}(B_R;\mathbb{R}^{nN})} \le c\Big(1 + \|u\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)}\Big). \tag{3.52}$$

Beweis. - Sei $\Omega' \subset\subset \Omega$. Seien $x_0 \in \Omega'$ und $0 < R < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ beliebig gewählt. Seien $y \in B_R$ und $0 < \sigma \le R$. Dann erhält man die Caccioppoli-Ungleichung

$$\int_{B_\sigma(y)} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x \le \frac{c}{\sigma^q} \int_{B_{2\sigma}(y)} (\sigma^q + |u|^q) \,\mathrm{d}x. \tag{3.53}$$ [5)]

Aus (3.53) und der Beschränktheit von u folgert man:

$$\begin{cases} \left(\sigma^{q-n} \displaystyle\int_{B_\sigma(y)} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x\right)^{1/q} \le c\Big(1 + \|u\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)}\Big) \\ \forall\, y \in B_R(x_0),\ \forall\, 0 < \sigma \le R, \end{cases} \tag{3.54}$$

wobei $c = \text{const}$ nur von $c_0/\nu_0, c_2, a, b, q, n, N, u$ und $1/\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ abhängt. Die Behauptung folgt nun sofort aus (3.52) und der Definition des Morrey-Raumes $L^{q,n-q}(B_R; \mathbb{R}^{nN})$. ■

Aus Lemma 3.4 erhalten wir unter Verwendung von (2.71) (vgl. Folgerung 2.2) unmittelbar die

Folgerung 3.1 *Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Lemma 3.4 sei* u *eine schwache Lösung von* (3.1) ($n \le 3$), *so daß die Kleinheitsbedingung* (3.48) *erfüllt ist. Dann gibt es für jedes* $\Omega' \subset\subset \Omega$ *eine positive Konstante* c, *die nur von* $c_0/\nu_0, c_2, a, b, q, n, N, u$ *und* $1/\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ *abhängt mit folgender Eigenschaft*:

---

5) Der Beweis von (3.53) verläuft fast völlig analog wie der Beweis der Caccioppoli-Ungleichung (1.48) (vgl. Lemma 1.6) unter Berücksichtigung der Kleinheitsforderung (3.48).

Seien $x_0 \in \Omega$ und $0 < R < \min\{\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega), 1\}$ beliebig gegeben. Ist $v \in W^{1,q}(B_R; \mathbb{R}^N)$ die eindeutig bestimmte Lösung des Dirichlet-Problems (3.30), (3.31), so gilt die folgende Abschätzung:

$$\|v\|_{L^\infty(B_R;\mathbb{R}^N)} \le c\Big(1 + \|u\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)}\Big). \tag{3.55}$$ ■

Wir kommen nun zum Beweis von Satz 3.3. Dabei behandeln wir die Fälle $n \le 3$ und $n \ge 4$ jeweils getrennt.

Beweis von Satz 3.3 für den Fall $n \le 3$

Wie im Beweis von Satz 3.2 wählen wir $0 < \tau < \frac{1}{2}$ derart daß

$$2^{n+3} A \sqrt{\tau} \le 1. \tag{3.56}$$ [6)]

Mit einer analogen Argumentation, die für den Beweis von Satz 3.2 benutzt wurde, folgt auch hier die Behauptung von Satz 3.3 unmittelbar aus Satz 3.1 unter Benutzung des nachstehenden Lemmas.

Lemma 3.5 *Seien (3.2)–(3.5) und (3.7) erfüllt. Sei $u \in W^{1,q} \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$ $(n \le 3)$ eine schwache Lösung des Systems (3.1), die der Kleinheitsforderung (3.48) genügt. Ferner sei $\Omega' \subset\subset \Omega$ eine beliebige fixierte offene Menge.*

a) *Es existiert eine Konstante K_1, die nur von $c_0/\nu_0, a, b, n, N, q, \tau, \Omega'$ und u abhängt sowie eine Konstante $1 < r < +\infty$, so daß für beliebige $x_0 \in \Omega'$ und $0 < R < \min\{\operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega'), 1\}$ gilt:*

$$\left(\fint_{B_{R/2}} |\nabla u - \nabla v|^q \, dx\right)^{1/q} \le K_1\Big(\omega(2\sqrt{R}) + R^{\frac{q}{2q'r'}}\Big)\mathcal{M}(u; x_0, R)^{1+1/r'}, \tag{3.57}$$

wobei $v \in W^{1,q}(B_{R/2}; \mathbb{R}^N)$ die schwache Lösung des Dirichlet-Problems (3.30), (3.31) bezeichne.

b) *Zu jedem $M > 0$ gibt es positive Zahlen $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(M)$ und $R_1 = R_1(M)$ mit folgender Eigenschaft:*

Ist für $x_0 \in \Omega'$ und $0 < R < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ die Bedingung

$$\Phi(u; x_0, R) \le \varepsilon_1 \quad \text{und} \quad \mathcal{M}(u; x_0, R) \le M \tag{3.58}$$

---

6) A gemäß (1.30) (vgl. Satz 1.2).

erfüllt, so haben wir die Abschätzung

$$\Phi(u;x_0,\tau R) \le \sqrt{\tau}\Phi(u;x_0,R) + \omega_0(R)M^{1+1/r'}, \tag{3.59}$$

wobei

$$\omega_0 := K_1(1+\tau^{-n})(\omega(2\sqrt{R}) + R^{\frac{q}{2q'r'}}).$$

Beweis. - a) Sei $\Omega' \subset\subset \Omega$ beliebig, aber fixiert. Seien $x_0 \in \Omega'$ und $0 < R < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Ebenso wie im Beweis von Lemma 3.2 folgt aus (3.2), (3.5) und (3.7)

$$\begin{aligned} \nu_0 \int_{B_{R/2}} (1+|\nabla u|+|\nabla w|)^{q-2}|\nabla w|^2\,\mathrm{d}x &\le \\ \le c\int_{B_{R/2}} \omega(R+|u-u_{B_R}|)(1+|\nabla u|)^{q-1}|\nabla w|\,\mathrm{d}x &+ \\ + c\int_{B_{R/2}} (1+|\nabla u|)^q|w|\,\mathrm{d}x &= I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{3.60}$$

(i) Mit der gleichen Argumentation wie beim Beweis von Lemma 3.2 finden wir

$$I_1 \le \mathcal{O}(x_0,R)\Big(\int_{B_R}(1+|\nabla u|)^q\,\mathrm{d}x\Big)^{1/q'}\Big(\int_{B_{R/2}}|\nabla w|^q\,\mathrm{d}x\Big)^{1/q},$$

wobei

$$\mathcal{O}(x_0,R) := \omega(2\sqrt{R}) + K_0R^{\frac{q}{2q'r'}}\mathcal{M}(u;x_0,R)^{\frac{q}{q'r'}},$$

und $K_0 = \text{const}$ nur von q,n,N und von $\sup\limits_{t\ge 0}\omega(t)$ abhängt.

(ii) Um das Integral I_2 abzuschätzen, verwenden wir die Ungleichung (3.55) (siehe Folgerung 3.1). Hiermit verifiziert man

$$I_2 \le c\Big(1+\|u\|^{1-q/r'}_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)}\Big)\int_{B_{R/2}}(1+|\nabla u|)^q|w|^{q/r'}\,\mathrm{d}x.$$

Unter Benutzung der Hölderschen Ungleichung, dem Lemma 3.3 und der Poincaré-Ungleichung folgert man

$$I_2 \le c\Big(R^{q-n}\int_{B_{R/2}}|\nabla w|^q\,\mathrm{d}x\Big)^{1/r'}\int_{B_R}(1+|\nabla u|)^q\,\mathrm{d}x.$$

Nach Einsetzen der Abschätzungen von I_1 und I_2 in (3.60) erhält man analog wie im Beweis von Lemma 3.2 mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung:

$$
\begin{aligned}
\int_{B_{R/2}} |\nabla w|^q \,\mathrm{d}x \;\le\; & c\,\mathcal{O}(x_0,R)^{q/2}\Bigg\{\bigg(\int_{B_R}(1+|\nabla u|)^q\,\mathrm{d}x\bigg)^{1/2}\bigg(\int_{B_{R/2}}|\nabla w|^q\,\mathrm{d}x\bigg)^{1/2}+ \\
&+\bigg(\int_{B_R}(1+|\nabla u|)^q\,\mathrm{d}x\bigg)^{(q-1)/2}\bigg(\int_{B_{R/2}}|\nabla w|^q\,\mathrm{d}x\bigg)^{(3-q)/2}\Bigg\}+ \qquad (3.61)\\
&+c\,R^{\frac{q(q-n)}{2r'}}\int_{B_R}(1+|\nabla u|)^q\,\mathrm{d}x\bigg(\int_{B_{R/2}}|\nabla w|^q\,\mathrm{d}x\bigg)^{q/2r'}+ \\
&+c\,R^{\frac{q(q-n)}{2r'}}\bigg(\int_{B_R}(1+|\nabla u|)^q\,\mathrm{d}x\bigg)^{q/2}\bigg(\int_{B_{R/2}}|\nabla w|^q\,\mathrm{d}x\bigg)^{(2r-q)/2r}.
\end{aligned}
$$

Aus der letzten Ungleichung folgt nun unter Anwendung der Youngschen Ungleichung

$$
\begin{aligned}
\fint_{B_{R/2}} |\nabla w|^q \,\mathrm{d}x \;\le\; & c\left(\omega(2\sqrt{R})+K_0R^{\frac{q}{2q'r'}}\right)\bigg(\fint_{B_R}(1+|\nabla u|)^q\,\mathrm{d}x\bigg)^{1+1/r'}+ \\
&+c\,R^{\frac{q^2}{2r'-q}}\bigg(\fint_{B_R}(1+|\nabla u|)^q\,\mathrm{d}x\bigg)^{2r'/(2r'-q)}+ \\
&+c\,R^{q(r-1)}\bigg(\fint_{B_R}(1+|\nabla u|)^q\,\mathrm{d}x\bigg)^{r}\le \\
\le\; & K_1\left(\omega(2\sqrt{R})+R^{\frac{q}{2q'r'}}\right)\bigg(\fint_{B_R}(1+|\nabla u|)^q\,\mathrm{d}x\bigg)^{1+1/r'},
\end{aligned}
$$

was die Gültigkeit der Behauptung (3.57) bestätigt.

2.) Die Aussage b) erhält man mit einem analogen Schluß wie in Lemma 3.2 unter Verwendung von Satz 1.2 und der oben hergeleiteten Abschätzung (3.57). ∎

Beweis von Satz 3.3 für den Fall $n \ge 4$

Wir nehmen an, der Stetigkeitsmodul ω der Koeffizienten A_i^α ($\alpha = 1,\dots,n; i = 1,\dots, N$) genüge der Dini-Bedingung (3.25). Nach Lemma A.9 existiert eine nichtwachsende Funktion $\gamma : (0,1] \to (0,+\infty)$ mit $\lim\limits_{t\to 0^+}\gamma(t) = +\infty$, so daß die Funktion

$$
\omega_0(t) := \gamma(t)\omega(2\sqrt{t}) + t^\sigma \qquad \left(\sigma = \min\left\{\frac{q}{4q'r'}, \frac{1}{4q'}\right\}\right)
$$

auf $(0,1]$ nichtfallend ist und der Bedingung

(3.62) $$\int_0^1 \frac{\omega_0(t)}{t}\,\mathrm{d}t < +\infty$$

genügt. Wie oben folgt die Aussage von Satz 3.3 aus Satz 3.1 unter Verwendung des folgenden Hauptlemmas.

Lemma 3.6 *Seien die Bedingungen (3.2)– (3.5) und (3.7) sowie (3.25) erfüllt. Sei* $u \in W^{1,q} \cap L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$ $(\frac{2n}{n+2} < q < 2)$ *eine schwache Lösung des Systems (3.1), welche der Kleinheitsbedingung (3.48) genügt. Dann gibt es für jedes* $\tau \in (0,\frac{1}{2})$ *und für jedes* $M > 0$ *eine positive Konstante* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\tau, M)$*, so daß die Ungleichung*

(3.63) $$\Phi(u;x_0,\tau R) \le 2A\tau(\Phi(u;x_0,R) + \omega_0(R))$$ [7)]

für all diejenigen $x_0 \in \Omega$ *und* $0 < R < \operatorname{dist}(x_0,\partial\Omega)$ *gültig ist, für die gilt:*

(3.64) $$\Phi(u;x_0,R) + \omega_0(R) \le \varepsilon_0 \quad \textit{und} \quad \mathcal{M}(u;x_0,R) \le M.$$

Beweis. - Wir führen den Beweis indirekt. Nehmen wir also an, es existieren Zahlen $\tau \in (0,\frac{1}{2})$ und $M > 0$, für welche die Behauptung des Lemmas nicht gilt. Dann existieren

1) zwei Nullfolgen (ε_m) und (R_m) positiver reeller Zahlen,
2) eine Folge (x_m) von Punkten in Ω,

derart, daß für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

(3.65) $$\Phi(u;x_m,R_m) + \omega_0(R_m) = \varepsilon_m, \quad \mathcal{M}(u;x_m,R_m) \le M,$$

(3.66) $$\Phi(u;x_m,\tau R_m) > 2A\tau(\Phi(u;x_m,R_m) + \omega_0(R_m)).$$

Als nächstes definieren wir

$$v_m(y) := \frac{u(x_m + R_m y) - u_{B_{R_m}} - R_m\lambda_m\cdot y}{R_m\varepsilon_m},$$

$$A^{\alpha\beta}_{ij(m)}(y) := \int_0^1 \frac{\partial A^\alpha_i}{\partial \xi^j_\beta}(x_m, u_{B_{R_m}}, t\varepsilon_m\nabla v_m(y) + \lambda_m)\,\mathrm{d}t \quad (y \in B_1)$$

$(\alpha,\beta = 1,\dots,n; i,j = 1,\dots,N)$, wobei

7) A gemäß (1.7) (siehe Satz 1.1).

$$\lambda_m := (\nabla u)_{B_{R_m}} \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Mit Hilfe der Transformationsformel für das Lebesgue-Integral folgert man aus (3.65) und (3.66), daß v_m zum Sobolev-Raum $W^{1,q}(B_1;\mathbb{R}^N)$ gehört und

$$\max\left\{\left(\fint_{B_1} (1+|\varepsilon_m \nabla v_m + \lambda_m|^q)\,\mathrm{d}y\right)^{1/q} + |u_{B_{R_m}}|^{q^*/q}, |\lambda_m|\right\} \le M, \tag{3.67}$$

$$\Phi(v_m;0,1) + \frac{\omega_0(R_m)}{\varepsilon_m} = 1, \tag{3.68}$$

$$\Phi(v_m;0,\tau) > 2A\tau\left(\Phi(v_m;0,1) + \frac{\omega_0(R_m)}{\varepsilon_m}\right). \tag{3.69}$$

Aus (3.9) schließt man außerdem, unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, daß v_m der folgenden Integralidentität genügt:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{B_1} A^{\alpha\beta}_{ij(m)} D_\beta v^j_m D_\alpha \psi^i \,\mathrm{d}y = \\ \displaystyle = \frac{1}{\varepsilon_m}\int_{B_1} \Big\{A^\alpha_i(x_m, u_{B_{R_m}}, \varepsilon_m\nabla v_m + \lambda_m) - \\ \qquad\qquad - A^\alpha_i(x_m + R_m y, u(x_m+R_m y), \varepsilon_m \nabla v_m + \lambda_m)\Big\} D_\alpha\psi^i\,\mathrm{d}y + \\ \displaystyle\qquad + \frac{R_m}{\varepsilon_m}\int_{B_1} B_i(x_m+R_m y, u(x_m+R_m y), \varepsilon_m\nabla v_m + \lambda_m)\psi^i\,\mathrm{d}y \\ \forall\, \psi \in C^1_{\mathrm{c}}(B_1;\mathbb{R}^N) \quad (m\in\mathbb{N}). \end{cases} \tag{3.70}$$

Unmittelbar aus der Definition von v_m folgt $(v_m)_{B_1} = (\nabla v_m)_{B_1} = 0$, und wegen (3.68) erhält man nach Anwendung der Poincaré-Ungleichung

$$\|v_m\|_{W^{1,q}(B_1)} \le c\|\nabla v_m\|_{L^q(B_1;\mathbb{R}^N)} = c\,\Phi(v_m;0,1) \le c. \tag{3.71}$$

Indem man ggf. zu einer Teilfolge übergeht, kann man annehmen, daß die folgenden Konvergenzeigenschaften erfüllt sind

$$x_m \to x_* \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n, \quad u_{B_{R_m}} \to u_* \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N, \quad \lambda_m \to \lambda_* \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^{nN}, \tag{3.72}$$

$$v_m \to v \quad \text{in} \quad L^2(B_1;\mathbb{R}^N), \tag{3.73}$$

$$D_\alpha v_m \rightharpoonup D_\alpha v \quad \text{in} \quad L^q(B_1;\mathbb{R}^N), \tag{3.74}$$

$$\varepsilon_m (D_\alpha v_m)(y) \to 0 \quad \text{ffa. } y \in B_1, \tag{3.75}$$

$$A^{\alpha\beta}_{ij(m)}(y) \to A^{\alpha\beta}_{ij(*)} \quad \text{ffa. } y\in B_1 \tag{3.76}$$

für $m \to +\infty$, wobei

$$A^{\alpha\beta}_{ij(*)} := \frac{\partial A^\alpha_i}{\partial \xi^j_\beta}(x_*, u_*, \lambda_*) = \mathrm{const} \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, n; i, j = 1, \dots, N).$$

In der Tat, (3.72) folgt aus der Beschränktheit der Folgen $(x_m), (u_{B_{R_m}})$ und (λ_m) (vgl. (3.67)), während man (3.73) und (3.74) wegen der Kompaktheit der Einbettung

$$W^{1,q}(B_1; \mathbb{R}^N) \subset L^2(B_1; \mathbb{R}^N)\ ^{8)}$$

und der Reflexivität des Raumes $L^q(B_1; \mathbb{R}^N)$ erhält. Für den Beweis von (3.75) benutzt man die Tatsache, daß die Folge $(\varepsilon_m D_\alpha v_m)$ bezüglich der $L^q(B_1; \mathbb{R}^N)$-Norm gegen 0 konvergiert. Nach dem Satz von Riesz-Fischer existiert daher eine Teilfolge (v_{m_j}), so daß (3.75) erfüllt ist. Schließlich verifiziert man (3.76) leicht unter Verwendung von (3.72), (3.75) und (3.3).

Sei $\psi \in C^\infty_c(B_1; \mathbb{R}^N)$ fixiert. Nun sind wir in der Lage in (3.70) den Grenzübergang $m \to +\infty$ durchzuführen:

(i) Aus (3.76) schließt man unter Verwendung des Satzes von Lebesgue

$$(3.77) \qquad A^{\alpha\beta}_{ij(m)} D_\alpha \psi \to A^{\alpha\beta}_{ij(*)} D_\alpha \psi \quad \text{in} \quad L^{q'}(B_1; \mathbb{R}^N) \quad \text{für} \quad m \to +\infty.$$

Beachtet man außerdem (3.74), so ergibt sich

$$(3.78) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{B_1} A^{\alpha\beta}_{ij(m)} D_\beta v^j_m D_\alpha \psi^i \, \mathrm{d}y \to \int_{B_1} A^{\alpha\beta}_{ij(*)} D_\beta v^j D_\alpha \psi^i \, \mathrm{d}y \\ \text{für} \quad m \to +\infty \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, n; i, j = 1, \dots, N). \end{cases}$$

(ii) Als nächstes werden wir die rechte Seite von (3.70) abschätzen.

1° Berücksichtigt man (3.2), so folgt mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung unter Verwendung von Lemma A.10

8) Man beachte: Die Voraussetzung $q > \frac{n+2}{2n}$ impliziert $\frac{nq}{n-q} > 2$.

$$
\begin{aligned}
|I_{1(m)}| &:= \frac{1}{\varepsilon_m}\bigg|\int_{B_1}\Big\{A_i^\alpha(x_m, u_{B_{R_m}}, \varepsilon_m\nabla v_m + \lambda_m) - \\
&\qquad -A_i^\alpha(x_m + R_m y, u(x_m + R_m y), \varepsilon_m\nabla v_m + \lambda_m)\Big\}D_\alpha\psi^i\,\mathrm{d}y\bigg| \le \\
&\le \frac{\max\limits_{B_1}|\nabla\psi|}{\varepsilon_m}\int_{B_1}\omega(R_m + |u(x_m + R_m) - u_{B_{R_m}}|)(1 + |\varepsilon_m\nabla v_m + \lambda_m|)\,\mathrm{d}y \le \\
&\le \frac{2M\,\mathrm{mes}(B_1)\max\limits_{B_1}|\nabla\psi|}{\varepsilon_m}\bigg(\fint_{B_1}[\omega(R_m + |u(x_m + R_m) - u_{B_{R_m}}|)]^{q'}\,\mathrm{d}y\bigg)^{1/q'} \le \\
&\le \frac{c}{\varepsilon_m}\Big\{\omega(2\sqrt{R_m}) + R_m^{1/2q'}\Big\} \le c\Big\{\frac{1}{\gamma(R_m)} + R_m^{1/4q'}\Big\},
\end{aligned}
$$

wobei $c = \text{const} > 0$ nicht von $m \in \mathbb{N}$ abhängt.

2° Aufgrund von (3.7) und (3.67) bekommt man

$$
\begin{aligned}
|I_{2(m)}| &:= \frac{R_m}{\varepsilon_m}\bigg|\int_{B_1} B_i(x_m + R_m y, u(x_m + R_m y), \varepsilon_m\nabla v_m + \lambda_m)\psi^i\,\mathrm{d}y\bigg| \\
&\le \max_{B_1}|\psi|\sqrt{R_m}\int_{B_1}(a|\varepsilon_m\nabla v_m + \lambda_m|^q + b)\,\mathrm{d}y \le c'\sqrt{R_m},
\end{aligned}
$$

wobei $c' = \text{const} > 0$ nicht von $m \in \mathbb{N}$ abhängt. Also

$$
I_{1(m)} + I_{2(m)} \to 0 \quad \text{für} \quad m \to +\infty.
$$

Nun erhält man nach Ausführung des Grenzüberganges $m \to +\infty$ in (3.70)

$$
\int_{B_1} A_{ij(*)}^{\alpha\beta} D_\beta v^j D_\alpha\psi^i\,\mathrm{d}y = 0 \quad \forall\,\psi \in C_c^\infty(B_1; \mathbb{R}^N). \tag{3.79}
$$

Außerdem ist leicht zu sehen, daß aufgrund von (3.4) und (3.5) gilt:

$$
\begin{cases}
(1 + |\lambda_*|)^{2-q} A_{ij(*)}^{\alpha\beta}\eta_\alpha^i\eta_\beta^j \ge \nu_0|\eta|^2 \quad \forall\,\eta \in \mathbb{R}^{nN}; \\[1ex]
(1 + |\lambda_*|)^{2-q}\Big|A_{ij(*)}^{\alpha\beta}\Big| \le c_0 \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, n; i, j = 1, \dots, N).
\end{cases}
$$

Der Satz 1.1 liefert somit die fundamentale Abschätzung

$$
\Phi(v; 0, \tau) \le A\tau\Phi(v; 0, 1). \tag{3.80}
$$

Wie wir unten beweisen werden, gilt zusätzlich

$$\lim_{m\to\infty} \Phi(v_m;0,\tau) \;=\; \Phi(v;0,\tau). \tag{3.81}$$

Somit ergibt sich aus (3.69) unter Verwendung der Unterhalbstetigkeit der Norm

$$\begin{aligned} 2A\tau\Phi(v;0,1) \le\; & 2A\tau \liminf_{m\to\infty} \Phi(v_m;0,1) \;\le \\ & \le \lim_{m\to\infty} \Phi(v_m;0,\tau) = \Phi(v;0,\tau), \end{aligned}$$

was wegen $\Phi(v_m;0,\tau) > 0$ ein Widerspruch zu (3.80) ist. Folglich kann unsere Annahme nicht richtig sein.

Es bleibt also nur noch die Konvergenzeigenschaft (3.81) zu beweisen. Hierfür wählen wir eine Schnittfunktion $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, so daß: $0 \le \zeta \le 1$ in $\mathbb{R}^n$, $\zeta \equiv 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus B_{1/2}$ und $\zeta \equiv 1$ auf B_τ. Offensichlich ist dann

$$\psi(y) = (v_m(y) - v(y))\zeta^2(y) \quad (y \in B_1)$$

eine sowohl für (3.70) als auch für (3.79) zulässige Testfunktion. Nach Einsetzen von ψ in (3.70) und (3.79) und Kombination der beiden Identitäten erhält man

$$\begin{aligned} \int_{B_1} & A^{\alpha\beta}_{ij(m)}(D_\beta v^j_m - D_\beta v^j) D_\alpha \psi^i \,\mathrm{d}y \;= \\ &= \int_{B_1} \Big\{A^{\alpha\beta}_{ij(*)} - A^{\alpha\beta}_{ij(m)}\Big\}(D_\beta v^j) D_\alpha\psi^i \,\mathrm{d}y + \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon_m}\int_{B_1} \Big\{A^\alpha_i(x_m, u_{B_{R_m}}, \varepsilon_m \nabla v_m + \lambda_m) - \\ &\qquad - A^\alpha_i(x_m + R_m y, u(x_m+R_m y), \varepsilon_m\nabla v_m + \lambda_m)\Big\} D_\alpha\psi^i \,\mathrm{d}y + \\ &\quad + \frac{R_m}{\varepsilon_m}\int_{B_1} B_i(x_m + R_m y, u(x_m + R_m y), \varepsilon_m \nabla v_m + \lambda_m)\psi^i \,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Beachtet man (3.5), so bestätigt man leicht nach Anwendung der Produkt- und Kettenregel

$$
\begin{aligned}
&\nu_0 \int_{B_1} (1 + |\varepsilon_m \nabla v_m + \lambda_m|)^{q-2} |\nabla v_m - \nabla v|^2 \zeta^2 \,\mathrm{d}y \;\le \\
&\le -2 \int_{B_1} A^{\alpha\beta}_{ij(m)} (D_\beta v^j_m - D_\beta v^j)(D_\beta v^j)(v^i_m - v^i)(D_\alpha \zeta)\zeta \,\mathrm{d}y \;+ \\
&\quad + \int_{B_1} \Big\{ A^{\alpha\beta}_{ij(*)} - A^{\alpha\beta}_{ij(m)} \Big\} (D_\beta v^j)(D_\alpha v^i_m - D_\alpha v^i)\zeta^2 \,\mathrm{d}y \;+ \\
&\quad + 2 \int_{B_1} \Big\{ A^{\alpha\beta}_{ij(*)} - A^{\alpha\beta}_{ij(m)} \Big\} (D_\beta v^j)(v^i_m - v^i)(D_\alpha \zeta)\zeta \,\mathrm{d}y \;+ \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon_m} \int_{B_1} \Big\{ A^\alpha_i (x_m, u_{B_{R_m}}, \varepsilon_m \nabla v_m + \lambda_m) \;- \\
&\qquad - A^\alpha_i (x_m + R_m y, u(x_m + R_m y), \varepsilon_m \nabla v_m + \lambda_m) \Big\} (D_\alpha v^i_m - D_\alpha v^i)\zeta^2 \,\mathrm{d}y \;+ \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon_m} \int_{B_1} \Big\{ A^\alpha_i (x_m, u_{B_{R_m}}, \varepsilon_m \nabla v_m + \lambda_m) \;- \\
&\qquad - A^\alpha_i (x_m + R_m y, u(x_m + R_m y), \varepsilon_m \nabla v_m + \lambda_m) \Big\} (v^i_m - v^i)(D_\alpha \zeta)\zeta \,\mathrm{d}y \,+ \\
&\quad + \frac{R_m}{\varepsilon_m} \int_{B_1} B_i (x_m + R_m y, u(x_m + R_m y), \varepsilon_m \nabla v_m + \lambda_m)(v^i_m - v^i)\zeta^2 \,\mathrm{d}y \;= \\
&= I_1 \,+\, I_2 \,+\, I_3 \,+\, I_4 \,+\, I_5 \,+\, I_6 .
\end{aligned}
\tag{3.82}
$$

(i) Unter Verwendung von (3.4) und der Tatsache, daß $v \in C^1(B_{1/2}; \mathbb{R}^N)$ erhält man mit Hilfe der Hölderschen und der Youngschen Ungleichung

$$
\begin{aligned}
I_1 \,+\, I_2 \,+\, I_3 \;\le\; &\delta \int_{B_1} (1 + |\varepsilon_m \nabla v_m + \lambda_m|)^{q-2} |\nabla v_m - \nabla v|^2 \zeta^2 \,\mathrm{d}y \,+ \\
&+\, c \bigg\{ \int_{B_1} |v_m - v|^2 \,\mathrm{d}y \,+\, \bigg(\int_{B_1} |\mathbf{A}_m - \mathbf{A}_*|^{q'} \,\mathrm{d}y \bigg)^{1/q'} \bigg\},
\end{aligned}
$$

wobei

$$
\delta := \frac{1}{6} \Big(\nu_0 - 2a(\|u\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)}) \|u\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)} \Big)
$$

($c = \text{const} > 0$ unabhängig von $m \in \mathbb{N}$).

(ii) Nochmaliges Anwenden der Youngschen Ungleichung und Berücksichtigung von (3.2) liefert nach Anwendung von Lemma 3.3 und Lemma A.10

$$
\begin{aligned}
I_4 \;\le\; & \delta \int_{B_1} (1+|\varepsilon_m \nabla v_m + \lambda_m|)^{q-2} |\nabla v_m - \nabla v|^2 \zeta^2 \,\mathrm{d}y \;+ \\
& + \frac{c}{\varepsilon_m^2} \left(\fint_{B_{R_m}} [\omega(R_m + |u - u_{B_{R_m}}|)]^{q'} (1+|\nabla u|^q)\zeta^2 \,\mathrm{d}x \right)^{2/q'} \;\times \\
& \qquad \times \left(\fint_{B_{R_m}} (1+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x \right)^{2/q-1} \;\le \\
\le\; & \delta \int_{B_1} (1+|\varepsilon_m \nabla v_m + \lambda_m|)^{q-2} |\nabla v_m - \nabla v|^2 \zeta^2 \,\mathrm{d}y \;+ \\
& + \frac{c}{\varepsilon_m^2} \left(\fint_{B_{R_m}} [\omega(R_m + |u - u_{B_{R_m}}|)]^{q'r'} \,\mathrm{d}x \right)^{2/q'r'} \;\times \\
& \qquad \times \fint_{B_{R_m}} (1+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x \;\le \\
\le\; & \delta \int_{B_1} (1+|\varepsilon_m \nabla v_m + \lambda_m|)^{q-2} |\nabla v_m - \nabla v|^2 \zeta^2 \,\mathrm{d}y \;+ \\
& \qquad + \frac{c\, M^{q\left(1+\frac{2}{q'r'}\right)}}{\varepsilon_m^2} \left\{ [\omega(2\sqrt{R_m})]^2 \;+\; R_m^{\frac{q}{q'r'}} \right\} \;\le \\
\le\; & \delta \int_{B_1} (1+|\varepsilon_m \nabla v_m + \lambda_m|)^{q-2} |\nabla v_m - \nabla v|^2 \zeta^2 \, dy + c\, M^{q\left(1+\frac{2}{q'r'}\right)} \left[\frac{1}{\gamma(R_m)} \;+\; R_m^\sigma \right]^2,
\end{aligned}
$$

wobei c eine von $m \in \mathbb{N}$ unabhängige Konstante bezeichne.

(iii) Analog wie die soeben bewiesene Abschätzung erhält man

$$
I_5 \;\le\; c \int_{B_1} |v_m - v|^2 \,\mathrm{d}y \;+\; c \left[\frac{1}{\gamma(R_m)} \;+\; R_m^\sigma \right]^2
$$

mit einer von $m \in \mathbb{N}$ unabhängigen Konstanten $c > 0$.

(iv) Um I_6 abzuschätzen, machen wir Gebrauch von den folgenden beiden Abschätzungen.

$$
\begin{aligned}
|\varepsilon_m \nabla v_m + \lambda_m|^q \;\le\; & (1+|\varepsilon_m \nabla v_m + \lambda_m|)^{q-2} (\varepsilon_m |\nabla v_m - \nabla v| + |\varepsilon_m \nabla v + \lambda_m| + 1)^2 \\
\le\; & \varepsilon_m^2 (1+|\varepsilon_m \nabla v_m + \lambda_m|)^{q-2} |\nabla v_m - \nabla v|^2 + \\
& \qquad + \; c\,(1+|\varepsilon_m \nabla v_m + \lambda_m|)^{q-2} |\varepsilon_m \nabla v_m| \;+\; c \;\le \\
\le\; & \varepsilon_m^2 (1+|\varepsilon_m \nabla v_m + \lambda_m|)^{q-2} |\nabla v_m - \nabla v|^2 + \\
& \qquad + \; c\,(|\varepsilon_m \nabla v_m + \lambda_m|^{q-1} + 1)
\end{aligned}
\tag{3.83}
$$

fast überall in $B_{1/2}$;

$$\|v_m\|_{L^\infty(B_1;\mathbb{R}^N)} \le \frac{2\|u\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)}}{\varepsilon_m R_m} + \frac{\lambda_m}{\varepsilon_m}. \tag{3.84}$$

Mit Hilfe von (3.7) schließt man

$$\begin{aligned} I_6 \le\ & a\frac{R_m}{\varepsilon_m}\int_{B_1} |\varepsilon_m\nabla v_m + \lambda_m|^q |v_m|\zeta^2\,\mathrm{d}y + \\ & + a\frac{R_m}{\varepsilon_m}\int_{B_1} |\varepsilon_m\nabla v_m + \lambda_m|^q |v|\zeta^2\,\mathrm{d}y \\ & + b\,\frac{R_m}{\varepsilon_m}\int_{B_1} |v_m - v|\,\mathrm{d}y \;=\; I_6' + I_6'' + I_6'''. \end{aligned}$$

Für die Abschätzung von I_6' machen wir Gebrauch von (3.83) und (3.84) und folgern hiermit

$$\begin{aligned} I_6' \le\ & a\,\varepsilon_m R_m \int_{B_1} (1 + |\varepsilon_m\nabla v_m + \lambda_m|)^{q-2}|\nabla v_m - \nabla v|^2 |v_m|\zeta^2\,\mathrm{d}y + \\ & + c\,\frac{R_m}{\varepsilon_m}\int_{B_{1/2}} (|\varepsilon_m\nabla v_m + \lambda_m|^{q-1} + 1)|v_m|\,\mathrm{d}y \;\le \\ \le\ & 2a\|u\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)}\int_{B_1} (1 + |\varepsilon_m\nabla v_m + \lambda_m|)^{q-2}|\nabla v_m - \nabla v|^2\zeta^2\,\mathrm{d}y \;+\; c\,R_m^{2\sigma}. \end{aligned}$$

Ähnlich findet man

$$I_6'' + I_6''' \le c\,R_m^{2\sigma}.$$

Somit haben wir

$$I_6 \le 2a\|u\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)}\int_{B_1} (1 + |\varepsilon_m\nabla v_m + \lambda_m|)^{q-2}|\nabla v_m - \nabla v|^2\zeta^2\,\mathrm{d}y \;+\; c\,R_m^{2\sigma},$$

wobei $c = \mathrm{const} > 0$ nicht von $m \in \mathbb{N}$ abhängt.

Nun erhalten wir nach Einsetzen der Abschätzungen von $I_1, \ldots, I_6$ in (3.81)

$$\begin{aligned} & \frac{\nu_0 - 2a\|u\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)}}{2}\int_{B_\tau} (1 + |\varepsilon_m\nabla v_m + \lambda_m|)^{q-2}|\nabla v_m - \nabla v|^2\,\mathrm{d}y \;\le \\ & \le c\left\{\int_{B_1} |v_m - v|^2\,\mathrm{d}y + \left(\int_{B_1} |\mathbf{A}_* - \mathbf{A}_m|^{q'}\,\mathrm{d}y\right)^{1/q'} + \left[\frac{1}{\gamma(R_m)} + R_m^\sigma\right]^2\right\}, \end{aligned} \tag{3.85}$$

wobei $c = \mathrm{const} > 0$ nicht von $m \in \mathbb{N}$ abhängt.

Da wegen (3.73) und (3.76) die rechte Seite von (3.85) für $m \to +\infty$ gegen 0 konvergiert, folgert man die behauptete Konvergenzeigenschaft (3.80), mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung aus dieser Ungleichung und (3.67). ■

Kapitel 4

Hölder-Stetigkeit bei zwei und drei Raumdimensionen

Im vorliegenden Kapitel untersuchen wir schwache Lösungen eines nichtlinearen Systems bei zwei und drei Dimensionen mit differenzierbaren Koeffizienten $\xi \mapsto A_i^\alpha(\xi)$. In diesen speziellen Fällen zeigen wir, daß eine schwache Lösung solcher Systeme bei geeignet gewählter rechten Seite lokal zur Klasse $C^{1,\mu}$ (bzw. zur Klasse $C^{0,\mu}$) gehören. Darüber hinaus erhalten wir a-priori-Abschätzungen, die wir im Teil II bei der Untersuchung parabolischer Systeme mit analoger Struktur bei zwei und drei Raumdimensionen benötigen werden.

4.1 Der Fall $n = 2$

Wir beginnen unsere Untersuchungen für den Fall $n = 2$. Mit dem Fall $n = 3$ werden wir uns im nächsten Abschnitt beschäftigen. Unser erstes Resultat beinhaltet die Existenz der zweiten schwachen Ableitungen der schwachen Lösung. Hierfür verwenden wir die bekannte Methode des Differenzenquotienten.

Satz 4.1 *Sei $f \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ $(p > 2, \Omega \subset \mathbb{R}^2)$ und seien $A_i^\alpha : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$ $(\alpha = 1,2; i = 1,\ldots,N)$ stetig differenzierbare Koeffizienten, die den Bedingungen (1.15) und (1.16) genügen. Ist $u \in W^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung von*

$$(4.1) \qquad -D_\alpha A_i^\alpha(\nabla u) = f_i \quad \text{in} \quad \Omega \quad (i = 1,\ldots,N),$$

dann existiert ein $r_0 \in \left(2, \dfrac{4p}{p+2}\right]$, so daß:

$$(4.2) \qquad u \in W^{2,r}_{\text{loc}}(\Omega';\mathbb{R}^N) \quad \forall\, r \in [1, r_0).$$

Außerdem haben wir für jedes fixierte $r \in [1, r_0)$ und jede offene Teilmenge $\Omega' \subset\subset \Omega$ die Abschätzung

$$(4.3) \qquad \|u\|^2_{W^{2,r}(\Omega';R^N)} \le c\Big(1 + \|\nabla u\|_{L^q(\Omega;R^{2N})} + \|f\|^{q'/q}_{L^p(\Omega;R^N)}\Big)^{\frac{(2-q)(p+2)}{p-2}},$$

wobei $c = \mathrm{const} > 0$ nur von $c_0/\nu_0, N, p, q, r$ und $1/\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ abhängt.

Beweis. - 1° Sei $x_0 \in \Omega$ und sei $0 < R < \min\{\operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega), 1\}$ beliebig fixiert. Sei $g \in H^1(B_R; \mathbb{R}^N)$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Dann bezeichne $v_\varepsilon \in H^1(B_R; \mathbb{R}^N)$ die eindeutig bestimmte schwache Lösung des Dirichlet-Problems:

$$(4.4) \qquad \begin{cases} -\varepsilon\Delta v^i_\varepsilon - D_\alpha A^\alpha_i(\nabla v_\varepsilon) = f_i & \text{in} \quad B_R \quad (i = 1, \dots, N), \\ v_\varepsilon = g \quad \text{f.ü. auf} \quad \partial B_R. \end{cases}$$

Insbesondere gilt für beliebige $\varphi \in H^1_\circ(B_R; \mathbb{R}^N)$ die Identität

$$(4.5) \qquad \int_{B_R} (\varepsilon D_\alpha v^i_\varepsilon + A^\alpha_i(\nabla v_\varepsilon)) D_\alpha \varphi^i \,\mathrm{d}x = \int_{B_R} f_i \varphi^i \,\mathrm{d}x.$$

Benutzt man die Methode des Differenzenquotienten, so ergibt sich aus (4.5) unter Verwendung geeigneter Testfunktionen φ, daß $v_\varepsilon \in W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(B_R; \mathbb{R}^N)$.

Seien nun $0 < \sigma < \rho < R$ beliebig gewählt. Sei $\zeta \in C^\infty_c(\mathbb{R}^2)$ eine Schnittfunktion, so daß $\zeta \equiv 1$ auf B_σ, $\zeta \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus B_\rho$ und $0 \le \zeta \le 1$, $|\nabla u| \le c/(\rho - \sigma)$ in $\mathbb{R}^2$. Wie man leicht nachprüft, ist für ein $\gamma \in \{1, 2\}$ und $h \in \mathbb{R}\,(0 < h < R - \rho)$

$$\varphi(x) := (D_\gamma \zeta^2 \Delta^{(\gamma)}_h v_\varepsilon)(x) \quad (x \in B_R)\ ^{1)}$$

eine für (4.5) zulässige Testfunktion. Nach Einsetzen von φ in diese Identität folgt mit Hilfe partieller Integration

$$\varepsilon \int_{B_\rho} (D_\gamma D_\alpha v_\varepsilon)(\Delta^{(\gamma)}_h D_\alpha v_\varepsilon)\zeta^2 \,\mathrm{d}x + \int_{B_\rho} \frac{\partial A^\alpha_i}{\partial \xi^j_\beta}(\nabla v_\varepsilon)(D_\gamma D_\beta v^j_\varepsilon)(\Delta^{(\gamma)}_h D_\alpha v^i_\varepsilon)\zeta^2 \,\mathrm{d}x =$$

$$(4.6) \qquad = -2\varepsilon \int_{B_\rho} (D_\gamma D_\alpha v^i_\varepsilon)(\Delta^{(\gamma)}_h v^i_\varepsilon)(D_\alpha \zeta)\zeta \,\mathrm{d}x - 2\int_{B_\rho} A^\alpha_i(\nabla v_\varepsilon)(D_\gamma (D_\alpha \zeta)\zeta \Delta^{(\gamma)}_h v^i_\varepsilon) \,\mathrm{d}x -$$
$$- \int_{B_\rho} f_i (D_\gamma \zeta^2 \Delta^{(\gamma)}_h v^i_\varepsilon) \,\mathrm{d}x.$$

[1] Zur Definition des Differenzenquotienten siehe Kapitel 2.

Beachtet man (1.16), so folgt aus (4.6) nach Ausführung des Grenzüberganges $h \to 0$

$$\varepsilon \int_{B_\rho} |D^2 v_\varepsilon|^2 \zeta^2 \,\mathrm{d}x \,+\, \nu_0 \int_{B_\rho} (1 + |\nabla v_\varepsilon|)^{q-2} |D^2 v_\varepsilon|^2 \zeta^2 \,\mathrm{d}x \,\le$$

$$\begin{aligned}
\text{(4.7)} \qquad &\le\, 2\varepsilon \int_{B_\rho} (D_\gamma D_\alpha v_\varepsilon^i)(D_\gamma v_\varepsilon^i)(D_\alpha \zeta)\zeta \,\mathrm{d}x \,-\, 2 \int_{B_\rho} A_i^\alpha(\nabla v_\varepsilon)(D_\alpha \zeta)\zeta \Delta v_\varepsilon^i \,\mathrm{d}x \,+ \\
&\quad - 2 \int_{B_\rho} A_i^\alpha(\nabla v_\varepsilon)\big((D_\gamma \zeta)(D_\alpha \zeta) + (D_\gamma D_\alpha \zeta)\zeta\big) D_\gamma v_\varepsilon^i \,\mathrm{d}x \,- \\
&\quad - \int_{B_\rho} f_i \Big(\zeta^2 \Delta v_\varepsilon^i + 2 (D_\gamma \zeta)\zeta D_\gamma v_\varepsilon^i \Big) \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Beachtet man (1.15), so ergibt sich mit Hilfe der Hölderschen und der Youngschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon}{2} \int_{B_\sigma} |D^2 v_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}x \,+\, \frac{\nu_0}{2} \int_{B_\sigma} (1 + |\nabla v_\varepsilon|)^{q-2} |D^2 v_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}x \,\le \\
\text{(4.8)} \qquad &\le\, \frac{\varepsilon c}{(\rho - \sigma)^2} \int_{B_\rho} |\nabla v_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}x \,+\, \frac{c}{(\rho - \sigma)^2} \int_{B_\rho} (1 + |\nabla v_\varepsilon|^q) \,\mathrm{d}x \,+ \\
&\quad + \Big(\int_{B_\rho} |f|^p \,\mathrm{d}x \Big)^{2/p} \Big(\int_{B_\rho} (1 + |\nabla v_\varepsilon|)^{\frac{p(2-q)}{p-2}} \,\mathrm{d}x \Big)^{(p-2)/p}.
\end{aligned}$$

Nun setzen wir

$$w_\varepsilon(x) := (1 + |\nabla v_\varepsilon(x)|)^{q/2} \quad (x \in B_R).$$

Unter Verwendung der Produkt- und Kettenregel berechnet man

$$D_\alpha w_\varepsilon = \frac{q}{2} (1 + |\nabla v_\varepsilon|)^{(q-2)/2} (D_\alpha D_\beta v_\varepsilon^j)(D_\beta v_\varepsilon^j) |\nabla v_\varepsilon|^{-1} \quad (\alpha = 1, 2)$$

fast überall in B_R. Dies liefert $w_\varepsilon \in H^1(B_R)$. Darüber hinaus erhält man für beliebiges $1 \le s < +\infty$ unter Verwendung des Sobolevschen Einbettungssatzes die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\text{(4.9)} \qquad \Big(\int_{B_\rho} |w_\varepsilon|^s \,\mathrm{d}x \Big)^{1/s} &\le\, c \Big(\rho^{4/s-2} \int_{B_\rho} |w_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}x \,+\, \rho^{4/s} \int_{B_\rho} |\nabla w_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}x \Big)^{1/2} \\
&\le\, c \Big(\rho^{-2} \int_{B_\rho} |w_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}x \,+\, \int_{B_\rho} |\nabla w_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}x \Big)^{1/2}
\end{aligned}$$

für beliebige $0 < \rho \le R$, wobei $c = \text{const}$ nur von s abhängt.

Aus (4.8) folgt nun unter Verwendung von (4.9) $\Big(\text{mit } s := \dfrac{p(2-q)}{p-2}\Big)$ und der Youngschen Ungleichung

$$\frac{\varepsilon}{2}\int_{B_\sigma} |D^2 v_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\nu_0}{2}\int_{B_\sigma} |\nabla w_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}x \le$$

$$\begin{aligned} &\le \frac{\varepsilon c}{(\rho-\sigma)^2}\int_{B_\rho} |\nabla v_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{c}{(\rho-\sigma)^2}\int_{B_\rho} (1+|\nabla v_\varepsilon|^q)\,\mathrm{d}x + \\ &\quad + \Big(\int_{B_\rho} |f|^p \,\mathrm{d}x\Big)^{2/p} \Big(\int_{B_\rho} |w_\varepsilon|^{\frac{2p(2-q)}{q(p-2)}} \,\mathrm{d}x\Big)^{(p-2)/p} \le \\ &\le \frac{\varepsilon\, c}{(\rho-\sigma)^2}\int_{B_\rho} |\nabla v_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{c}{(\rho-\sigma)^2}\int_{B_\rho} (1+|\nabla v_\varepsilon|^q)\,\mathrm{d}x + \\ &\quad + c\Big(\int_{\Omega} |f|^p \,\mathrm{d}x\Big)^{q'/p} + \frac{\nu_0}{4}\int_{B_\rho} |\nabla w_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Aus dieser Ungleichung schließt man unter Benutzung von Lemma A.3

$$\begin{aligned} &\varepsilon\int_{B_\sigma} |D^2 v_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}x + \nu_0\int_{B_\sigma} (1+|\nabla v_\varepsilon|)^{q-2}|D^2 v_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}x \le \\ &\quad \le \frac{\varepsilon\, c}{(R-\sigma)^2}\int_{B_R} |\nabla v_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{c}{(R-\sigma)^2}\int_{B_R} (1+|\nabla v_\varepsilon|^q)\,\mathrm{d}x + \\ &\quad\quad + c\Big(\int_{\Omega} |f|^p \,\mathrm{d}x\Big)^{q'/p}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

wobei die Konstante c nicht von ε abhängt.

2° Wie man leicht nachprüft, ist $v_\varepsilon - g$ eine für die Identität (4.5) zulässige Testfunktion. Nach Einsetzen dieser Funktion in (4.5) findet man mit Hilfe der Hölderschen und Youngschen Ungleichung unter Beachtung von (1.15) und (1.16):

$$\begin{aligned} &\varepsilon\int_{B_R} |\nabla v_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}x + \nu_0\int_{B_R} |\nabla v_\varepsilon|^q \,\mathrm{d}x \le \\ &\quad \le c\int_{B_R} (1+|\nabla g|^q + \varepsilon|\nabla g|^2)\,\mathrm{d}x + c\Big(\int_{\Omega} |f|^p \,\mathrm{d}x\Big)^{q'/p}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Kombiniert man (4.11) und (4.12), so folgt

$$(4.13) \qquad \int_{B_\sigma} (1 + |\nabla v_\varepsilon|)^{q-2} |D^2 v_\varepsilon|^2 \, dx \le$$
$$\le \frac{c}{(R-\sigma)^2} \Big\{ \int_{B_R} (1 + |\nabla g|^q + \varepsilon |\nabla g|^2) \, dx + \Big(\int_\Omega |f|^p \, dx \Big)^{q'/p} \Big\},$$

für beliebige $0 < \sigma < R$, wobei $c = \text{const} > 0$ nur von $c_0/\nu_0, N, p, q$ und $1/\operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ abhängt.

Wegen (4.12) und der Reflexivität des Raumes $W^{1,q}(B_R; \mathbb{R}^N)$ existiert eine Funktion $v \in W^{1,q}(B_R; \mathbb{R}^N)$ und eine Folge positiver Zahlen (ε_m) mit $\lim_{m \to \infty} \varepsilon_m = 0$, so daß

$$(4.14) \qquad v_{\varepsilon_m} \rightharpoonup v \quad \text{in} \quad W^{1,q}(B_R; \mathbb{R}^N) \quad \text{für} \quad m \to +\infty.$$

Die Abschätzung (4.13) liefert nun zusammen mit (4.14) unter Berücksichtigung der Kompaktheit der Einbettung

$$W^{2,q}(B_\sigma; \mathbb{R}^N) \subset W^{1,q}(B_\sigma; \mathbb{R}^N)$$

und der Reflexivität von $W^{2,q}(B_\sigma; \mathbb{R}^N)$

$$(4.15) \qquad v_{\varepsilon_m} \rightharpoonup v \quad \text{in} \quad W^{2,q}(B_\sigma; \mathbb{R}^N),$$
$$(4.16) \qquad v_{\varepsilon_m} \to v \quad \text{in} \quad W^{1,q}(B_\sigma; \mathbb{R}^N)$$

für $m \to +\infty$ $\quad (0 < \sigma < R)$. Hiermit ist sofort klar, daß $v \in W^{1,q} \cap W^{2,q}_{\text{loc}}(B_R; \mathbb{R}^N)$ und außerdem eine schwache Lösung des folgenden Dirichlet-Problems ist:

$$(4.17) \qquad \begin{cases} -D_\alpha A_i^\alpha(\nabla v) = f_i \quad \text{in} \quad B_R \qquad (i = 1, \ldots, N) \\ v = g \quad \text{f.ü. auf} \quad \partial B_R. \end{cases}$$

Überdies erhält man aus (4.12) und (4.13) nach Ausführung des Grenzüberganges $m \to +\infty$ die a-priori-Abschätzungen

$$(4.18) \qquad \int_{B_R} |\nabla v|^q \le c \int_{B_R} (1 + |\nabla g|^q) \, dx + c \Big(\int_\Omega |f|^p \, dx \Big)^{q'/p}$$

und für alle $0 < \sigma < R$:

$$(4.19) \qquad \int_{B_\sigma} (1 + |\nabla v|)^{q-2} |D^2 v|^2 \, dx \le$$
$$\le \frac{c}{(R-\sigma)^2} \Big\{ \int_{B_R} (1 + |\nabla g|^q) \, dx + \Big(\int_\Omega |f|^p \, dx \Big)^{q'/p} \Big\},$$

wobei die Konstante c weder von σ und R noch g abhängt.

3° Nun sei $u \in W^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung von (4.1). Mit Hilfe eines Standardapproximationsargumentes findet man eine Folge $g_m \in H^1(B_R;\mathbb{R}^N)$ $(m \in \mathbb{N})$, derart daß

$$g_m \to u \quad \text{in} \quad W^{1,q}(B_R;\mathbb{R}^N) \quad \text{für} \quad m \to +\infty. \tag{4.20}$$

Aus 2° folgt die Existenz schwacher Lösungen $v_m \in W^{1,q} \cap W^{2,q}_{\mathrm{loc}}(B_R;\mathbb{R}^N)$ des folgenden Dirichlet-Problems

$$\begin{cases} -D_\alpha A_i^\alpha(\nabla v_m) \;=\; f_i \quad \text{in} \quad B_R \qquad (i=1,\dots,N) \\ v_m \;=\; g_m \quad \text{f.ü. auf} \quad \partial B_R \qquad (m \in \mathbb{N}). \end{cases} \tag{4.21}$$

Berücksichtigt man die Reflexivität der Räume $W^{1,q}(B_R;\mathbb{R}^N)$ und $W^{2,q}(B_\sigma;\mathbb{R}^N)$ $(0 < \sigma < R)$, so folgt mit Hilfe der Abschätzungen (4.18) und (4.19) die Existenz einer Teilfolge (v_{m_j}) und einer Funktion $\overline{u} \in W^{1,q} \cap W^{2,q}_{\mathrm{loc}}(B_R;\mathbb{R}^N)$, so daß

$$v_{m_j} \rightharpoonup \overline{u} \quad \text{in} \quad W^{1,q}(B_R;\mathbb{R}^N),$$

und für alle $0 < \sigma < R$

$$\begin{aligned} v_{m_j} &\rightharpoonup \overline{u} \quad \text{in} \quad W^{2,q}(B_\sigma;\mathbb{R}^N), \\ v_{m_j} &\to \overline{u} \quad \text{in} \quad W^{1,q}(B_\sigma;\mathbb{R}^N) \end{aligned}$$

für $j \to +\infty$.

Wegen $v_{m_j} - g_{m_j} \in W^{1,q}_\circ(B_R;\mathbb{R}^N)$ und der vorausgesetzten Konvergenzeigenschaft von g_m $(m \in \mathbb{N})$ bestätigt man, daß $u - \overline{u} \in W^{1,q}_\circ(B_R;\mathbb{R}^N)$. Überdies verifiziert man, daß neben u auch $\overline{u}$ eine schwache Lösung des folgenden Dirichlet-Problems ist:

$$\begin{cases} -D_\alpha A_i^\alpha(\nabla \overline{u}) \;=\; f_i \qquad \text{in} \quad B_R \qquad (i=1,\dots,N) \\ \overline{u} \;=\; u \quad \text{f.ü. auf} \quad \partial B_R. \end{cases} \tag{4.22}$$

Da die Lösung von (4.22) jedoch eindeutig bestimmt ist, haben wir $u = \overline{u}$. Außerdem schließen wir aus (4.19) nach Ausführung des Grenzüberganges $j \to +\infty$

$$\begin{aligned} &\int_{B_\sigma} (1+|\nabla u|)^{q-2} |D^2 u|^2 \,\mathrm{d}x \;\le \\ &\qquad \le \frac{c}{(R-\sigma)^2} \int_{B_R} (1+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x \;+\; c\left(\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}x\right)^{q'/p} \end{aligned} \tag{4.23}$$

für beliebige $0 < \sigma < R$.

Sei $\Omega' \subset\subset \Omega$ beliebig gewählt. Aus (4.23) folgt unter Verwendung eines Überdeckungsargumentes

$$(1 + |\nabla u|)^{q/2} \in H^1(\Omega'; \mathbb{R}^N)$$

und

$$\int_{\Omega'} (1 + |\nabla u|)^{q-2} |D^2 u|^2 \, \mathrm{d}x \le c \int_\Omega (1 + |\nabla u|^q) \, \mathrm{d}x + c \Big(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}x \Big)^{q'/p}.$$

Insbesondere bekommt man mit Hilfe des Sobolevschen Einbettungssatzes

$$u \in W^{1,s}_{\mathrm{loc}}(\Omega'; \mathbb{R}^N) \quad \forall\, 1 \le s < +\infty, \tag{4.24}$$

$$\|\nabla u\|_{L^s(\Omega'; R^{2N})} \le c \Big(1 + \|\nabla u\|_{L^q(\Omega; R^{2N})} + \|f\|^{q'}_{L^p(\Omega; R^N)} \Big). \tag{4.25}$$

4° Unter Verwendung geeigneter Testfunktionen verifiziert man ähnlich wie in 3° für beliebige $x_0 \in \Omega$, $0 < R < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ und für jedes $\Lambda \in \mathbb{R}^{2N}$ die folgende Caccioppoli-Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_{B_R} (1 + |\nabla u|)^{q-2} |D^2 u|^2 \, \mathrm{d}x \le \\ \le \frac{c}{R^2} \int_{B_{2R}} (1 + |\nabla u|^2 + |\nabla u - \Lambda|^2)^{(q-2)/2} |\nabla u - \Lambda|^2 \, \mathrm{d}x + \\ + c \int_{B_{2R}} (1 + |f|^{(p+2)/2} + |\nabla u|^{\frac{(2-q)(p+2)}{p-2}} + |\nabla u - \Lambda|^{\frac{(2-q)(p+2)}{p-2}}) \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Wählt man $\Lambda \in \mathbb{R}^{nN}$ geeignet, und wendet man die in [Naumann and Wolf (1992)] bewiesene verallgemeinerte Poincaré-Ungleichung an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} ⨍_{B_R} \Big[(1 + |\nabla u|)^{(q-2)/2} |D^2 u| \Big]^2 \, \mathrm{d}x \le \\ \le c \Big(⨍_{B_{2R}} (1 + |\nabla u|)^{(q-2)/2} |D^2 u| \, \mathrm{d}x \Big)^2 + \\ + c ⨍_{B_{2R}} (1 + |f|^{(p+2)/2} + |\nabla u|^{\frac{(2-q)(p+2)}{p-2}}) \, \mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{4.26}$$

wobei $c = \text{const}$ nur von $c_0/\nu_0, q, p$ und N abhängt. Aus (4.26) erhält man mit Hilfe des Resultates höherer Integrierbarkeit nach Gehring-Giaquinta-Modica (vgl. [Giaquinta and Modica (1979a)] bzw. [Giaquinta (1983)], Kap. V) die folgende Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\left(\fint_{B_R}\Big[(1+|\nabla u|)^{(q-2)/2}|D^2u|\Big]^r \,\mathrm{d}x\right)^{2/r} \le \\
(4.27)\qquad &\le c\fint_{B_R}\Big[(1+|\nabla u|)^{(q-2)/2}|D^2u|\Big]^2 \,\mathrm{d}x + \\
&+ c\left(\fint_{B_{2R}}\Big[1+|f|^{(p+2)/2}+|\nabla u|^{\frac{(2-q)(p+2)}{p-2}}\Big]^r \,\mathrm{d}x\right)^{2/r}
\end{aligned}$$

für ein $r > 1$ ($c = \text{const}$ unabhängig von x_0, R und u). Hieraus folgert man mit Hilfe des Sobolevschen Einbettungssatzes, daß ∇u in Ω' wesentlich beschränkt ist. Mit Hilfe dieser Information folgert man die Behauptung (4.3) unter Verwendung des Sobolevschen Einbettungssatzes zusammen mit (4.27) und (4.23). ■

Benutzt man den Sobolevschen Einbettungssatz, so liefert der Satz 4.1 sofort die

Folgerung 4.1 *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.1 sei* $u \in W^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ *eine schwache Lösung von* (4.1). *Dann existiert ein* $\mu \in (0,1)$, *so daß*

$$u \in C^{1,\mu}(\overline{\Omega}';\mathbb{R}^N) \quad \forall\,\Omega' \subset\subset \Omega. \tag{4.28}$$ ■

4.2 Der Fall $n = 3$

Wir beginnen diesen Abschnitt mit dem Nachweis gebrochener Differenzierbarkeit. Hierbei verwenden wir die Differenzenmethode. Zunächst machen wir die folgende vorbereitende Bemerkung.

Die Differenzenmethode: Sei $v \in L^p(\Omega)\,(1 \le p < +\infty)$. Wir setzen v auf $\mathbb{R}^n$ durch 0 fort und bezeichnen diese Fortsetzung der Einfachheit halber ebenfalls mit v. Seien $\beta \in \{1,\dots n\}$ und $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Wir definieren die Differenz durch

$$(\tau_h^{(\beta)}v)(x) := v(x+e_\beta h) - v(x) \quad (x \in \Omega)$$

($e_\beta = (0,\dots 0,1,0,\dots 0)$ [die 1 an der β-ten Stelle]).

Wir haben nun das folgende nützliche Lemma.

Lemma 4.1 *Sei* $v \in L^p(\Omega)\,(1 \le p < +\infty)$ *und sei* $0 < \mu < 1$. *Außerdem existiere für eine offene Menge* $\Omega' \subset\subset \Omega$ *eine Konstante* $C_0 = C_0(\Omega') > 0$, *so daß*

$$\sum_{\beta=1}^n \int_{\Omega'} |\tau_h^{(\beta)}v|^p \,\mathrm{d}x \le C_0|h|^{\mu p} \quad \forall\, 0 < |h| < \operatorname{dist}(\Omega',\partial\Omega).$$

Dann gehört v zu $W^{\theta,p}(\Omega')$ für jedes $0 < \theta < \mu$. Außerdem gibt es eine nur von C_0, p, n und $1/\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ abhängige Konstante C_1, so daß

$$|v|^p_{W^{\theta,p}(\Omega')} \le \frac{C_1}{p(\mu - \theta)}. \qquad \blacksquare$$

Lemma 4.2 *Sei $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$ und seien A_i^α ($\alpha = 1, \dots, n; i = 1, \dots, N$) Koeffizienten, die den Bedingungen (1.15) und (1.16) genügen. Sei $u \in W^{1,q} \cap W^{1,s}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ für ein $s \in [2, +\infty)$ eine schwache Lösung von (4.1). Dann haben wir für beliebige $\Omega' \subset\subset \Omega$:*

$$u \in W^{1+\mu,\, 2s/(2-q+s)}(\Omega'; \mathbb{R}^N) \qquad \forall\, 0 < \mu < \frac{s-q}{2-2q+s}. \tag{4.29}$$

Beweis. - Seien $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega''' \subset\subset \Omega$ beliebig, aber fixiert. Sei $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine *Schnittfunktion*, so daß $0 \le \zeta \le 1$ in $\mathbb{R}^n$, $\zeta \equiv 1$ auf Ω' und $\zeta \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \Omega''$. Wie man leicht nachprüft ist für $\beta \in \{1, \dots, n\}$ und $h \in \mathbb{R}; 0 < |h| < \operatorname{dist}(\Omega'', \partial\Omega''')$

$$\varphi(x) \;=\; (\tau^{(\beta)}_{-h}(\tau^{(\beta)}_h u)\zeta^2)(x) \quad (x \in \Omega'')$$

für (4.5) zulässig. Nach Einsetzen von φ in diese Identität folgt in ähnlicher Weise wie in [Naumann and Wolf (1992)] mit Hilfe partieller Integration unter Beachtung von (1.15) und (1.16)

$$\int_{\Omega''} (1 + |\nabla u(\cdot\, + he_\beta)| + |\nabla u|)^{q-2} |\tau^{(\beta)}_h \nabla u|^2 \zeta^2 \,\mathrm{d}x \;\le$$

$$\begin{aligned}
&\le\; c\,|h| \Big(\int_\Omega |f_i|^2 \,\mathrm{d}x \Big)^{1/2} \Big(\int_{\Omega'''} [(\tau^{(\beta)}_h D_\beta u^i)\zeta^2 + (\tau^{(\beta)}_h u^i)(D_\beta \zeta)\zeta]^2 \,\mathrm{d}x \Big)^{1/2} + \\
&\qquad + c\,|h|^2 \int_\Omega (1 + |\nabla u|^q) \,\mathrm{d}x \;\le \\
&\le\; c\,|h|^2 \int_{\Omega'''} (1 + |\nabla u|^2 + |f|^2) \,\mathrm{d}x + \\
&\qquad + c\,|h| \Big(\int_\Omega |f|^2 \,\mathrm{d}x \Big)^{1/2} \Big(\int_{\Omega''} |\tau^{(\beta)}_h \nabla u|^2 \zeta^2 \,\mathrm{d}x \Big)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Beachtet man die Gleichung

$$|\tau_h^{(\beta)}\nabla u|^2 = \Big((1+|\nabla u(\cdot\,+he_\beta)|+|\nabla u|)^{s-2}|\tau_h^{(\beta)}\nabla u|^2\Big)^{\frac{2-q}{s-q}}\times$$
$$\times\Big((1+|\nabla u(\cdot\,+he_\beta)|+|\nabla u|)^{q-2}|\tau_h^{(\beta)}\nabla u|^2\Big)^{\frac{s-2}{s-q}}$$

fast überall in $\Omega''\,(\beta = 1,\dots n; 0 < |h| < \operatorname{dist}(\Omega'',\partial\Omega))$, so erhält man mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung

$$\int_{\Omega''}|\tau_h^{(\beta)}\nabla u|^2\zeta^2\,\mathrm{d}x \le c\Big(\int_{\Omega'''}|\nabla u|^s\,\mathrm{d}x\Big)^{(2-q)/(s-q)}\times$$
$$\times\Big(\int_{\Omega''}(1+|\nabla u(\cdot\,+he_\beta)|+|\nabla u|)^{q-2}|\tau_h^{(\beta)}\nabla u|^2\zeta^2\,\mathrm{d}x\Big)^{(s-2)/(s-q)}.$$

Schätzt man die rechte Seite von (4.30) mit der soeben hergeleiteten Ungleichung weiter nach oben ab, benutzt man die Youngsche Ungleichung und anschließend die Höldersche Ungleichung, so bestätigt man

$$\text{(4.31)}\qquad \int_{\Omega'}|\tau_h^{(\beta)}\nabla u|^\kappa\,\mathrm{d}x \le C_0 h^{\kappa(s-q)/(2-2q+s)}\qquad\Big(\kappa := \frac{2s}{2-q+s}\Big),$$

wobei $C_0 = \text{const} > 0$ nicht von h abhängt. Die Behauptung ergibt sich nun unmittelbar aus Lemma 4.1. ■

Satz 4.2 *Sei $n = 3$. Sei $f \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)$ und seien A_i^α $(\alpha = 1,2,3; i = 1,\dots,N)$ Koeffizienten, die den Bedingungen (1.15) und (1.16) genügen. Ist $u \in W^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ $(3/2 < q < 2)$ eine schwache Lösung von (4.1), dann haben wir für beliebige $\Omega' \subset\subset \Omega$:*

$$\text{(4.32)}\qquad u \in C^{0,\mu}(\overline{\Omega}';\mathbb{R}^N)\qquad \forall\, 0 < \mu < \frac{2q-3}{2q-2}.$$

Beweis. - Zunächst definieren wir den den Grenzexponenten der Integrierbarkeit von ∇u durch

$$s_* := \sup\Big\{s \ge q \,|\, u \in W^{1,s}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^N)\Big\}.$$

1° Mit Hilfe einer indirekten Methode zeigen wir nun, daß $s_* > 2$. Wir nehmen also an, daß $q < s_* \le 2$. [2)] Sei $q < s < s_*$ beliebig gewählt. Sei $\Omega' \subset\subset \Omega$ beliebig fixiert. Ähnlich wie im Beweis von (4.31) bekommt man bei Wahl einer geeigneten Testfunktion die Abschätzung

[2)] Unter Verwendung geeigneter Testfunktionen erhält man mit einer ähnlichen Verfahrensweise wie im Beweis von Lemma 4.2 mit Hilfe von Lemma 4.1 gebrochene Differenzierbarkeit von ∇u. Hieraus schließt man nach Anwendung des Sobolevschen Einbettungssatzes, daß $u \in W^{1,s}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ für ein $s > q$ ist. Insbesondere gilt $s_* > q$.

(4.33) $$\int_{\Omega'} |\tau_h^{(\beta)} \nabla u|^q \, \mathrm{d}x \;\leq\; C_0 h^{\frac{q(5s-6)}{4s}} \qquad (\beta \in \{1, 2, 3\})$$

für alle $0 < |h| < \dfrac{1}{2}\,\mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, wobei $C_0 = \mathrm{const} > 0$ nicht von h abhängt. Unter Verwendung von Lemma 4.1 folgert man hieraus

$$u \in W^{1+\theta,\,q}(\Omega'; \mathbb{R}^N) \quad \forall\, 0 < \theta < \frac{5s-6}{4s},$$

und mit Hilfe des Sobolevschen Einbettungssatzes ergibt sich

(4.34) $$u \in W^{1,\,\overline{s}}(\Omega'; \mathbb{R}^N) \qquad \forall\, q \leq \overline{s} < h(s),$$

wobei

$$h(s) \;:=\; \frac{12qs}{12s - 5qs + 6q} \qquad (s \;\geq\; q).$$

Elementar bekommt man

$$h(s) \;>\; s \quad \forall\, q \leq s < \frac{6q}{12 - 5q}.$$

Wie man sich leicht überlegt, impliziert die Voraussetzung $q > 3/2$

$$\frac{6q}{12 - 5q} > 2.$$

Aufgrund der obigen Annahme, schließt man hieraus $q < s_* < \frac{6q}{12-5q}$, also $h(s_*) > s_*$. Aus der Stetigkeit von h folgt somit die Existenz einer Zahl $s^* \in [q, s_*)$, so daß $h(s^*) > s_*$. Dies würde aber bedeuten, daß $u \in W^{1,\,s}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ für ein $s \in (s_*, s^*)$ ist, was jedoch im Widerspruch zur Definition von s_* steht. Folglich ist $s_* > 2$.

2° Mit einem analogen indirekten Schluß wie in 1° erhält man sogar $s_* \geq 6(q-1)$. In der Tat, nimmt man an, daß $2 < s_* < 6(q-1)$, so folgt mit Hilfe von Lemma 4.2 zusammen mit dem Sobolevschen Einbettungssatz

(4.35) $$u \in W^{1,\,s}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^N) \qquad \forall\, q \leq s < F(s_*),$$

wobei

$$F(t) \;:=\; \frac{6t(t - 2q + 2)}{3(t - 2q + 2)(t - q + 2) - 2t(t - q)} \qquad (t \in [1, 6(q-1)]).$$

Wie man sich mit Hilfe einer elementaren Rechnung klarmacht, gilt:

$$F(t) > t \qquad \forall\, q < t < 6(q-1).$$

Hieraus schließt man, aufgrund der Stetigkeit von F und der Annahme $s_* < 6(q-1)$ auf die Existenz einer Zahl $s^* \in [q, s_*)$ mit $F(s^*) > s_*$, was jedoch im Widerspruch zur Definition von s_* steht. Folglich haben wir

$$u \in W^{1,s}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^N) \qquad \forall\, q \le s < 6(q-1). \tag{4.36}$$

3° Wie man leicht sieht, ist die Voraussetzung $q > 3/2$ äquivalent zu $6(q-1) > 3$. Aus dem in 2° bewiesenen Resultat erhält man nunmehr $u \in W^{1,s_0}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ für ein $s_0 > 3$ und die Behauptung des Satzes ist nun eine unmittelbare Konsequenz des Sobolevschen Einbettungssatzes. ■

Anmerkung 4.1 Die indirekte Methode, die wir für den Beweis von Satz 4.2 benutzten, hatte den Vorteil, schnell zum gewünschten Regularitätsresultat zu gelangen, besitzt jedoch den Nachteil, keine konkrete Normabschätzung zu liefern. Für spätere Anwendungen skizzieren wir eine iterative Methode, welche nach endlich vielen Schritten eine brauchbare a-priori-Abschätzung liefert. Hierfür benötigen wir die in den Beweisen von Lemma 4.2 von Satz 4.2 hergeleiteten Aussagen.

Sei $u \in W^{1,q} \cap W^{1,s_0}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ ($s_0 \in [2, 6(q-1))$) eine schwache Lösung des Systems (4.1). Mit Hilfe von Lemma 4.2 findet man unter Berücksichtigung von (4.31) sowie Anwendung des Sobolevschen Einbettungssatzes

$$\|\nabla u\|_{L^{s_1}(\Omega''; \mathbb{R}^{3N})} \le c\Big(1 + \|f\|^2_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)} + \|\nabla u\|^2_{L^{s_0}(\Omega'; \mathbb{R}^{3N})}\Big) \qquad \forall\, 1 \le s_1 < F(s_0) \tag{4.37}$$

für beliebige offene Mengen $\Omega'' \subset\subset \Omega' \subset\subset \Omega$, wobei die Konstante c nur von $c_0/\nu_0, q, N, s_0$, s_1 und $1/\operatorname{dist}(\Omega'', \partial\Omega')$ abhängt.

Es ist leicht zu sehen, daß die oben definierte Funktion $F : [2, s_*] \to \mathbb{R}$ ($s_* = 6(q-1)$) stetig differenzierbar ist und außerdem die folgenden Eigenschaften besitzt

$$\text{(i)} \quad s < F(s) < s_* \quad \forall\, s \in [2, s_*); \qquad \text{(ii)} \quad F(s_*) = s_*; \qquad \text{(iii)} \quad F'(s_*) < 1.$$

Hieraus schließt man auf die Existenz einer positiven Zahl δ_0, so daß

$$F(s) - \delta_0(s_* - s) \; > \; s \quad \forall\, s \in [2, s_*), \tag{4.38}$$

denn anderenfalls gäbe es eine Nullfolge (δ_k) positiver Zahlen und eine Folge $(s_k) \subset [2, s_*)$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} s_k = s_*$, so daß

$$F(s_k) - \delta_k(s_* - s_k) \; = \; s_k \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

also

$$\frac{F(s_*) - F(s_k)}{s_* - s_k} = 1 - \delta_k \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Dies würde aber bedeuten, daß $F'(s_*) = 1$, was jedoch der oben notierten Eigenschaft (iii) von F widerspricht.

Nun sei $\delta_0 > 0$ so gewählt, daß (4.38) gültig ist. Dann definieren wir eine Folge (s_k) gemäß der rekursiven Vorschrift:

$$\begin{cases} s_1 = 2 \\ s_{k+1} = F(s_k) - \delta_0(s_* - s_k) \qquad (k \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Offensichtlich ist diese Folge monoton wachsend und es gilt $s_k \to s_*$ für $k \to +\infty$. Außerdem liefert Lemma 4.2 für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$u \in W^{1,s_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^N) \quad \Rightarrow \cdots \Rightarrow \quad u \in W^{1,s_k}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^N). \tag{4.39}$$

Wendet man die Abschätzung (4.37) zusammen mit (4.39) iterativ an, so ergibt sich nach k-Schritten ($k \in \mathbb{N}$) für beliebige offene Mengen $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$

$$\|\nabla u\|^2_{L^{s_k}(\Omega'; \mathbb{R}^{3N})} \leq c\Big(1 + \|f\|^{2^k}_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)} + \|\nabla u\|^{2^k}_{L^2(\Omega''; \mathbb{R}^{3N})}\Big), \tag{4.40}$$

wobei $c = \text{const}$ nur von $c_0/\nu_0, q, N, k$ und $1/\operatorname{dist}(\Omega'', \partial\Omega')$ abhängt. ■

Teil II

Parabolische Systeme

Kapitel 5

Evolutionsgleichungen

5.1 Fourieranalysis

Sei X ein (komplexer) Banach-Raum mit der Norm $\|\cdot\|_X$. Mit $L^p(a,b;X)$ $(-\infty \le a < b \le +\infty; 1 \le p \le +\infty)$ bezeichnen wir den Vektorraum aller (Klassen) stark Bochner-meßbarer Funktionen $u : (a,b) \to X$, so daß

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_a^b \|u(t)\|_X^p \,\mathrm{d}t \right)^{1/p} < +\infty & \text{für} \quad 1 \le p < +\infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(a,b)} \|u(t)\|_X < +\infty & \text{für} \quad p = +\infty. \end{cases}$$

Bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L^p(a,b;X)}$ ist $L^p(a,b;X)$ ein Banach-Raum.

Seien $0 < \theta < 1$ und $1 \le p < +\infty$ beliebig gewählt. Dann definieren wir den Sobolev-Slobodetskij-Raum

$$W^{\theta,p}(a,b;X) := \left\{ u \in L^p(a,b;X) \;\middle|\; \int_a^b \int_a^b \frac{\|u(s)-u(t)\|_X^p}{|s-t|^{1+p\theta}} \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}s < +\infty \right\}.$$

Wir setzen

$$|u|_{W^{\theta,p}(a,b;X)} := \left(\frac{1}{\sigma_\theta} \int_a^b \int_a^b \frac{\|u(s)-u(t)\|_X^p}{|s-t|^{1+p\theta}} \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t \right)^{1/p},$$

wobei

$$\sigma_\theta := 2 \int_0^\infty \frac{1-\cos t}{t^{1+p\theta}} \,\mathrm{d}t.$$

Der Raum $W^{\theta,p}(a,b;X)$, ausgestattet mit der Norm

$$\|u\|_{W^{\theta,p}(a,b;X)} = \Big(\|u\|^p_{L^p(a,b;X)} + |u|^p_{W^{\theta,p}(a,b;X)}\Big)^{1/p},$$

ist dann ein Banach-Raum. Für den Spezialfall $p = 2$ schreiben wir $H^\theta(a, b; X)$ anstatt $W^{\theta,2}(a, b; X)$.

Ist $a = -\infty$ und $b = +\infty$, so erhält man elementar unter Verwendung der Transformationsformel für das Lebesgue-Integral für alle $u \in W^{\theta,p}(\mathbb{R}; X)$

$$|u|^p_{W^{\theta,p}(\mathbb{R};X)} = \frac{1}{\sigma_\theta} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}h}{h^{1+p\theta}} \int_{\mathbb{R}} \|u(t+h) - u(t)\|^p_X \,\mathrm{d}t. \tag{5.1}$$

Wir sagen, eine Funktion $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ gehöhrt zu $\mathcal{S}$, falls für jedes $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt:

$$p_k(\varphi) = \sup_{t\in\mathbb{R}} (1 + |t|)^k \sum_{j=0}^{k} |\varphi^{(j)}(t)| < +\infty.$$

Wir notieren, daß die Familie von Halbnormen $\{p_0, p_1, \ldots\}$ eine lokalkonvexe Topologie auf $\mathcal{S}$ definiert, wodurch dieser Raum zu einem Frechét-Raum wird (vgl. [Lions and Magenes (1968)]). Die Funktionen aus $\mathcal{S}$ werden in der Literatur auch *schnell fallend* genannt.

Die Fouriertransformierte einer Funktion $\varphi \in \mathcal{S}$ wird folgendermaßen definiert:

$$(\mathcal{F}\varphi)(\tau) = \hat{\varphi}(\tau) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}\,\tau t} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \quad (\tau \in \mathbb{R}).$$

Die inverse Fouriertransformierte von $\varphi \in \mathcal{S}$ ist definiert vermöge der Vorschrift

$$(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(\tau) = \tilde{\varphi}(\tau) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\,\tau t} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \quad (\tau \in \mathbb{R}).$$

Insbesondere ist $\mathcal{F}$ ein Homöomorphismus auf $\mathcal{S}$.

Mit $\mathcal{S}'(\mathbb{R}; X)$ bezeichnen wir den Raum $\mathcal{L}(\mathcal{S}; X)$, ausgestattet mit der schwachen Topologie. Die Elemente aus $\mathcal{S}'(\mathbb{R}; X)$ heißen auch *temperierte Distributionen* (mit Werten in X). Für $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}; X)$ setzen wir

$$\langle \mathcal{F}f, \varphi\rangle = \langle f, \mathcal{F}\varphi\rangle, \quad \langle \mathcal{F}^{-1}f, \varphi\rangle = \langle f, \mathcal{F}^{-1}\varphi\rangle \quad (\varphi \in \mathcal{S}).$$

Dann gilt in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}; X)$:

$$\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathrm{id}.$$

Somit ist auch $\mathcal{F}$ ein Homöomorphismus von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}; X)$ auf sich selbst.

Sei H ein (komplexer) Hilbert-Raum, dessen Skalarprodukt wir mit $(\cdot,\cdot)_H$ bezeichnen. Wir setzen $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}; H)$ und definieren auf $\mathcal{H}$ das Skalarprodukt

$$(\varphi,\psi)_{\mathcal{H}} := \int_{\mathbb{R}} (\varphi(t),\psi(t))_H \,\mathrm{d}t \qquad (\varphi,\psi \in \mathcal{H}),$$

womit $\mathcal{H}$ zu einem Hilbert-Raum wird.

Für $\varphi \in \mathcal{H}$ definieren wir

$$\langle T_\varphi, \psi\rangle := \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t \quad (\psi \in \mathcal{S}).$$

Dann ist $T_\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}; H)$. Der Raum $\mathcal{H}$ kann somit vermöge der Zuordnung $\varphi \mapsto T_\varphi$ als Teilraum von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}; H)$ aufgefaßt werden. Insbesondere ist die Fouriertransformierte einer Funktion $\varphi \in \mathcal{H}$ wohldefiniert. Nach dem Satz von Plancherel haben wir

$$(5.2) \qquad (\varphi,\psi)_{\mathcal{H}} = (\hat\varphi,\hat\psi)_{\mathcal{H}}, \quad \|\varphi\|_{\mathcal{H}} = \|\hat\varphi\|_{\mathcal{H}} \qquad \forall\, \varphi,\psi \in \mathcal{H}.$$

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann definieren wir

$$\mathcal{H}_\alpha := \Big\{\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}; H) \,\Big|\, (1+(\cdot)^2)^{\alpha/2}\hat\varphi \in \mathcal{H}\Big\}.$$ [1)]

Der lineare Raum $\mathcal{H}_\alpha$ wird versehen mit der Norm

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}_\alpha} := \left(\int_{\mathbb{R}} (1+\tau^2)^\alpha \|\hat\varphi(\tau)\|^2 \,\mathrm{d}\tau\right)^{1/2} \qquad (\varphi \in \mathcal{H}_\alpha).$$

Überdies liefert der Ausdruck

$$(\varphi,\psi)_{\mathcal{H}_\alpha} = \int_{\mathbb{R}} (1+\tau^2)^\alpha (\hat\varphi(\tau),\hat\psi(\tau))_H \,\mathrm{d}\tau \quad (\varphi,\psi \in \mathcal{H}_\alpha)$$

ein Skalarprodukt auf $\mathcal{H}_\alpha$, der damit zu einem Hilbert-Raum wird.

Unter Verwendung des Satzes von Plancherel und des Satzes von Fubini verifiziert man

$$(5.3) \qquad \int_0^\infty \frac{dh}{h^{1+2\theta}} \int_{\mathbb{R}} \|\varphi(t+h)-\varphi(t)\|_H^2 \,\mathrm{d}t = \sigma_\theta \int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2\theta} \|\hat\varphi(\tau)\|_X^2 \,\mathrm{d}\tau \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{H}_\alpha.$$

Aus (5.3) und (5.1) schließt man sofort, daß die beiden Räume $H^\theta(\mathbb{R}; H)$ und $\mathcal{H}_\theta$ zueinander isomorph sind.

[1)] Sei $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}; H)$. Wir sagen $F \in \mathcal{H}$, genau dann wenn F sich durch eine Funktion $f \in \mathcal{H}$ darstellen läßt, das heißt: $\langle F,\varphi\rangle = \langle F_f,\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \;\forall\, \varphi \in \mathcal{S}$.

Als nächstes führen wir einige Bezeichnungen ein, die wir in den nachfolgenden Betrachtungen benötigen werden:

(i) Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}; H)$. Wir definieren

$$\mathcal{M}_\alpha f := m_\alpha \cdot f,$$

wobei $m_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ den Multiplikator

$$m_\alpha(t) \;=\; (1+t^2)^{\alpha/2} \quad (t \in \mathbb{R})$$

bezeichne. Dann setzen wir

$$\mathcal{G}_\alpha := \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{M}_\alpha \circ \mathcal{F} \;=\; \mathcal{F} \circ \mathcal{M}_\alpha \circ \mathcal{F}^{-1}.$$ [2)]

Offensichtlich gilt $\mathcal{G}_\alpha^{-1} \;=\; \mathcal{G}_{-\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$. Also ist für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Abbildung $\mathcal{G}_\alpha$ ein linearer Isomorphismus von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}; H)$ auf sich selbst.

(ii) Sei $h \in \mathbb{R}$. Der Differenzenoperator $\Delta_h : \mathcal{S}'(\mathbb{R}; H) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}; H)$ ist dann folgendermaßen definiert:

$$\langle \Delta_h f, \varphi \rangle \;:=\; \langle f, \Delta_{-h}\varphi \rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{S},$$

wobei $(\Delta_h\varphi)(t) \;:=\; \varphi(t+h) - \varphi(t)$ $(t \in \mathbb{R})$.

(iii) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Das Steklov-Mittel f_λ von $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}; H)$ sei gegeben vermöge

$$\langle f_\lambda, \varphi \rangle \;=\; \langle f, \varphi_{-\lambda} \rangle \quad (\varphi \in \mathcal{S}).$$ [3)]

(iv) Wir setzen $\mathfrak{R}\varphi \;:=\; -\,\mathrm{i}\;\mathcal{F}^{-1}(\mathrm{sign}(\cdot)\mathcal{F}\varphi)$ $(\varphi \in \mathcal{H})$. Den linearen Operator $\mathfrak{R}$ bezeichnet man üblicherweise mit Hilbert-Transformation (bzw. mit Riesz-Transformation im n-dimensionalen Fall).

Wie aus der Literatur bekannt ist, kann man im skalarwertigen Fall $(H \;=\; \mathbb{C})$ die Hilbert-Transformation $\mathfrak{R}$ auf den Raum $L^p(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ $(p \in (1, +\infty))$ fortsetzen (siehe hierzu in Stein [Stein (1970)]), so daß diese Fortsetzung ebenfalls ein linearer Isomorphismus von $L^p(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ auf sich selbst ist. Genauer, für jedes $p \in (1, +\infty)$ gibt es eine positive Konstante C_p, so daß

[2)] Diese Eigenschaft folgt aus der Symmetrie des Multiplikators m_α und $(\mathcal{F}\varphi)(-\tau) = (\mathcal{F}^{-1}\varphi)(\tau)$ für jedes $\varphi \in \mathcal{S}$ und für alle $\tau \in \mathbb{R}$.

[3)] Hierbei bezeichne φ_λ $(\varphi \in \mathcal{S})$ das übliche Steklov-Mittel (zur Definition des Steklov-Mittels siehe Abschnitt 6.1).

$$(5.4)\qquad \|\mathfrak{R}\varphi\|_{L^p(\mathbb{R};\mathbb{C})} \leq C_p\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R};\mathbb{C})} \quad \forall\,\varphi \in L^p(\mathbb{R};\mathbb{C}).$$

Auf der anderen Seite ist bekannt, daß die obige Aussage im allgemeinen nicht gilt, falls man $\mathbb{C}$ durch einen beliebigen Banach-Raum X ersetzt. Damit also eine analoge Abschätzung wie (5.4) erfüllt ist, muß der Banach-Raum X noch zusätzliche Eigenschaften besitzen. Mit der folgenden Definition werden solche Banach-Räume besonders ausgezeichnet.

Definition 5.1 *Sei $p \in (1,+\infty)$. Wir sagen, ein komplexer Banach-Raum X besitze die Eigenschaft $(\mathfrak{R})_p$ bezüglich eines Hilbert-Raumes H, falls $X \cap H$ in X dicht ist und eine positive Konstante $C_{X,p}$ existiert, derart daß*

$$(5.5)\qquad \|\mathfrak{R}\varphi\|_{L^p(\mathbb{R};X)} \leq C_{X,p}\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R};X)} \quad \forall\,\varphi \in L^p(\mathbb{R};X) \cap L^2(\mathbb{R};H).$$

Da insbesondere $L^p(\mathbb{R};X) \cap L^2(\mathbb{R};H)$ eine dichte Teilmenge von $L^p(\mathbb{R};X)$ bildet, läßt sich $\mathfrak{R}$ zu einem linearen Isomorphismus auf $L^p(\mathbb{R};X)$ fortsetzen, den wir dann mit $\mathfrak{R}_X$ bezeichnen. ■

An dieser Stelle sei bemerkt, daß zum Beispiel der Sobolev-Raum $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{C}^N)$ ($p \in (1,+\infty)$) die Eigenschaft $(\mathfrak{R})_p$ bezüglich des Hilbert-Raumes $H = L^2(\Omega;\mathbb{C}^N)$ besitzt. Diese Aussage werden wir im Abschnitt 6.1 beweisen. Insbesondere erfüllt jeder Hilbert-Raum H die Eigenschaft $(\mathfrak{R})_p$ bezüglich H. [4)]

In der folgenden Anmerkung treffen wir einige Aussagen, die sich entweder unmittelbar aus den obigen Definitionen ergeben oder elementar beweisen lassen.

Anmerkung 5.1 a) *Die Familie $\{\mathcal{G}_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ bildet eine kommutative Gruppe. Genauer, es gilt*:

$$(5.6)\qquad \mathcal{G}_\alpha \circ \mathcal{G}_\beta = \mathcal{G}_\beta \circ \mathcal{G}_\alpha = \mathcal{G}_{\alpha+\beta} \quad \forall\,\alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

b) *Für beliebige $\alpha, h \in \mathbb{R}$ sind die Operatoren $\mathcal{G}_\alpha$ und Δ_h miteinander vertauschbar*:

$$(5.7)\qquad \Delta_h(\mathcal{G}_\alpha f) = \mathcal{G}_\alpha(\Delta_h f) \qquad \forall\, f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R};H).$$

c) *Unter Verwendung des Satzes von Plancherel bestätigt man leicht, daß*

$$(\mathfrak{R}\varphi, \mathfrak{R}\psi)_{\mathcal{H}} = (\varphi,\psi)_{\mathcal{H}} \qquad \forall\,\varphi,\psi \in \mathcal{H}.$$

Folglich ist die Hilbert-Transformation $\mathfrak{R}$ eine auf $\mathcal{H}$ definierte unitäre Abbildung. Außerdem verifiziert man, daß $\mathfrak{R} \circ \mathfrak{R} = -\,\mathrm{id}$.

[4)] Tiefergehende Studien zu diesem Thema findet man in [Stein (1970)].

d) *Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt. Aus der obigen Definition und dem Satz von Plancherel ergibt sich leicht die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen*:

$$1^\circ \quad \varphi \in \mathcal{H}_k \qquad\qquad 2^\circ \quad \varphi^{(j)} \in \mathcal{H} \quad \forall\, j \in \{0, 1, \ldots, k\}.$$

Überdies gilt:

$$\|\varphi\|^2_{\mathcal{H}_k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \|\varphi^{(j)}\|^2_{\mathcal{H}} \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}_k. \tag{5.8}$$ ■

Wir haben nun das folgende nützliche Lemma, welches sich mit elementaren Mitteln beweisen läßt.

Lemma 5.1 *Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) $\varphi \in \mathcal{H}_\alpha$

(ii) $\mathcal{G}_\alpha \varphi \in \mathcal{H}$

(iii) $\mathcal{G}_\beta \varphi \in \mathcal{H}_{\alpha-\beta} \quad \forall\, \beta \in \mathbb{R}$.

(iv) *Für jedes $\theta \in (0,1)$ gilt $\mathcal{G}_{\alpha-\theta}\varphi \in \mathcal{H}_\theta$ und*

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}h}{h^{1+2\theta}} \|\varphi(\,\cdot\, + h) - \varphi\|^2_{\mathcal{H}_{\alpha-\theta}} < +\infty. \tag{5.9}$$

Beweis. - Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig fixiert.
1) (i)⇔(ii): Aus der Definition des Raumes $\mathcal{H}_\alpha$ und dem Satz von Plancherel folgt

$$\varphi \in \mathcal{H}_\alpha \varphi \Leftrightarrow (1 + (\cdot)^2)^{\alpha/2} \hat{\varphi} = (\mathcal{F} \circ \mathcal{G}_\alpha)\varphi \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \mathcal{G}_\alpha \varphi \in \mathcal{H}.$$

2) (ii)⇔(iii): Sei $\beta \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Wie oben bekommt man unter Verwendung der Eigenschaft (5.6)

$$\mathcal{G}_\beta \varphi \in \mathcal{H}_{\alpha-\beta} \Leftrightarrow (\mathcal{G}_{\alpha-\beta} \circ \mathcal{G}_\beta)\varphi = \mathcal{G}_\alpha \varphi \in \mathcal{H}.$$

3) (iv)⇔(ii): Sei $0 < \theta < 1$ beliebig gewählt. Wegen (ii)⇔(iii) ergibt sich leicht

$$\mathcal{G}_{\alpha-\theta}\varphi \in \mathcal{H}_\theta \Leftrightarrow \mathcal{G}_\alpha \varphi \in \mathcal{H}.$$

Es bleibt also nur noch, die Gültigkeit der Ungleichung (5.9) zu zeigen. Sei $\varphi \in \mathcal{H}_\alpha$ beliebig gewählt. Wie bereits bewiesen, ist $\mathcal{G}_{\alpha-\theta}\varphi \in \mathcal{H}_\theta \subset \mathcal{H}$. Außerdem ergibt sich unmittelbar aus der Definition des Raumes $\mathcal{H}_{\alpha-\theta}$

$$\|\phi\|_{\mathcal{H}_{\alpha-\theta}} = \|\mathcal{G}_{\alpha-\theta}\phi\|_{\mathcal{H}} \quad \forall\, \phi \in \mathcal{H}_{\alpha-\theta}. \tag{5.10}$$

Nun setzen wir $\psi := \mathcal{G}_{\alpha-\theta}\varphi$. Unter Verwendung von (5.10) und (5.3) erhält man sofort

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}h}{h^{1+2\theta}} \|\varphi(\,\cdot\,+h) - \varphi\|^2_{\mathcal{H}_{\alpha-\theta}} = \\
&= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}h}{h^{1+2\theta}} \|\psi(\,\cdot\,+h) - \psi\|^2_{\mathcal{H}} = \\
&= \sigma_\theta \int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2\theta} \|\hat{\psi}(\tau)\|^2_H \,\mathrm{d}\tau \le \sigma_\theta \|\psi\|^2_{\mathcal{H}_\theta} = \sigma_\theta \|\varphi\|^2_{\mathcal{H}_\alpha} < +\infty.
\end{aligned}$$

■

Folgerung 5.1 *Für beliebige $\varphi \in \mathcal{H}$ gilt $\mathcal{G}_{-1/2}\varphi \in \mathcal{H}_{1/2}$. Außerdem haben wir*

$$\frac{1}{\sigma_{1/2}} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}h}{h^2} \|\varphi(\,\cdot\,+h) - \varphi\|^2_{\mathcal{H}_{-1/2}} \le \|\varphi\|^2_{\mathcal{H}}. \tag{5.11}$$

Beweis. - Sei $\varphi \in \mathcal{H}$. Die Implikation (i)$\Rightarrow$(iii) aus Lemma 5.1 mit $\alpha = 0$ und $\beta = -1/2$ liefert sofort $\mathcal{G}_{-1/2}\varphi \in \mathcal{H}_{1/2}$, und zusammen mit (5.10) haben wir

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = \|\mathcal{G}_{-1/2}\varphi\|_{\mathcal{H}_{1/2}} \ge \int_{\mathbb{R}} |\tau| \|\widehat{\mathcal{G}_{-1/2}\varphi}(\tau)\|^2_H \,\mathrm{d}\tau.$$

Die Behauptung ergibt sich somit unmittelbar nach Anwendung von (5.3) auf die rechte Seite der obigen Gleichung. ■

Mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung beweist man elementar die folgende Interpolationsungleichung:

Folgerung 5.2 *Seien $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$. Dann gilt für jedes $\theta \in [0,1]$*

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}_{(1-\theta)\alpha+\theta\beta}} \le \|\varphi\|^{1-\theta}_{\mathcal{H}_\alpha} \|\varphi\|^\theta_{\mathcal{H}_\beta} \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{H}_\beta. \tag{5.12}$$

Beweis. - Seien $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ und $\theta \in [0,1]$ beliebig fixiert. Sei $\varphi \in \mathcal{H}_\beta$. Beachtet man die Gleichung

$$\|\mathcal{G}_{(1-\theta)\alpha+\theta\beta}\varphi\|^2_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} \|\widetilde{\mathcal{G}_\alpha\varphi}(\tau)\|^{1-\theta}_H \|\widetilde{\mathcal{G}_\beta\varphi}(\tau)\|^\theta_H \,\mathrm{d}\tau,$$

so folgt die Behauptung mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung und dem Satz von Plancherel unmittelbar aus (5.10). ■

Lemma 5.2 *Sei $v \in \mathcal{H}$ und sei $0 < \mu < 1$. Ferner existiere eine positive Konstante K, so daß für alle $0 < h < +\infty$:*

$$\int_{\mathbb{R}} \|v(t+h) - v(t)\|_H^2 \,\mathrm{d}t \;\le\; K\, h^{2\mu}. \tag{5.13}$$

Dann ist $v \in \mathcal{H}_\theta$ für jedes $0 < \theta < \mu$. Außerdem haben wir die Abschätzung:

$$\|v\|_{\mathcal{H}_\theta}^2 \;\le\; \Big(1 + \frac{2}{\sigma_\theta \theta}\Big)\|v\|_{\mathcal{H}}^2 \;+\; \frac{K}{2\sigma_\theta(\mu-\theta)} \qquad (0 < \theta < \mu). \tag{5.14}$$

Beweis.- Aus der Voraussetzung (5.13) folgt unter Verwendung des Satzes von Fubini

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}h}{h^{1+2\theta}} \int_{\mathbb{R}} \|v(t+h) - v(t)\|_H^2 \,\mathrm{d}t \;= \\
&= \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}h}{h^{1+2\theta}} \int_{\mathbb{R}} \|v(t+h) - v(t)\|_H^2 \,\mathrm{d}t \,+ \\
&\qquad + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}h}{h^{1+2\theta}} \int_{\mathbb{R}} \|v(t+h) - v(t)\|_H^2 \,\mathrm{d}t \;\le \\
&\le 4\|v\|_{\mathcal{H}}^2 \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}h}{h^{1+2\theta}} \;+\; K \int_0^1 h^{2(\mu-\theta)-1} \,\mathrm{d}h \;\le\; \frac{2}{\theta}\|v\|_{\mathcal{H}}^2 \;+\; \frac{K}{2(\mu-\theta)}.
\end{aligned}$$

Die Behauptung bestätigt man nun leicht mit Hilfe von (5.3). ■

Mit V sei nun ein weiterer komplexer Hilbert-Raum gegeben, dessen Skalarprodukt wir mit $(\zeta,\eta)_V$ $(\zeta,\eta \in V)$ bezeichnen. Seine Norm $\sqrt{(\cdot,\cdot)_V}$ bezeichnen wir mit $\|\cdot\|_V$. Außerdem sei V stetig und dicht in H eingebettet. Wir setzen $\mathcal{V} := L^2(\mathbb{R}; V)$. Ebenso wie $\mathcal{H}$ wird auch $\mathcal{V}$ auf kanonische Weise zu einem Hilbert-Raum. Seine Norm (bzw. sein Skalarprodukt) bezeichnen wir mit $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ (bzw. $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{V}}$).

Lemma 5.3 *Sei $T : V \to H$ eine stetige, lineare Abbildung. Wir definieren den linearen Operator $\mathcal{T}$ vermöge*

$$(\mathcal{T}\varphi)(t) \;:=\; T(\varphi(t)) \qquad (t \in \mathbb{R},\; \varphi \in \mathcal{V}).$$

Dann ist $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{H}$ ebenfalls eine stetige lineare Abbildung. Außerdem gilt:

a) *Die Operatoren $\mathfrak{R}$ und $\mathcal{T}$ sind miteinander vertauschbar, das heißt:*

$$\mathcal{T} \circ \mathfrak{R}_V \;=\; \mathfrak{R}_H \circ \mathcal{T}. \tag{5.15}$$

b) *Für beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\mathcal{T}(f_\lambda) \;=\; (\mathcal{T}f)_\lambda \qquad \forall\, f \in \mathcal{V}. \tag{5.16}$$

Beweis. - Wegen der Stetigkeit von T ist ersichtlich, daß für jedes $\varphi \in \mathcal{V}$ die Funktion $t \mapsto T(\varphi(t))$ stark Bochner-meßbar ist. Außerdem bekommen wir die Abschätzung

$$\|\mathcal{T}\varphi\|_{\mathcal{H}} = \left(\int_{\mathbb{R}} \|T(\varphi(t))\|_H^2 \, \mathrm{d}t \right)^{1/2} \leq \|T\| \, \|\varphi\|_{\mathcal{V}},$$

woraus wir sofort $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{H})$ mit $\|\mathcal{T}\| \leq \|T\|$ schließen.

Nun sei $\varphi \in \mathcal{V} \cap L^1(\mathbb{R}; V)$ beliebig fixiert. Beachtet man die Stetigkeit von T, so ergibt sich für fast alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{T}(\mathcal{F}\varphi)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}\,\tau t} T(\varphi(\tau)) \, \mathrm{d}\tau = \mathcal{F}(\mathcal{T}\varphi)(t).$$

Da die Einbettung $\mathcal{V} \cap L^1(\mathbb{R}; V) \subset \mathcal{V}$ dicht ist, erhalten wir sofort aus der obigen Gleichung

$$(5.17) \qquad (\mathcal{T} \circ \mathcal{F})\varphi = (\mathcal{F} \circ \mathcal{T})\varphi \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{V}.$$

Mit einer analogen Argumentation verifiziert man

$$(5.18) \qquad (\mathcal{T} \circ \mathcal{F}^{-1})\varphi = (\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{T})\varphi \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{V}.$$

Sei $\varphi \in \mathcal{V}$ beliebig gewählt. Benutzt man (5.17), so ergibt sich aus der Definition von $\mathfrak{R}$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$:

$$(5.19) \qquad \mathcal{F}(\mathfrak{R}(\mathcal{T}\varphi))(t) = -T(\mathrm{i}\ \mathrm{sign}(\cdot)\mathcal{F}\varphi)(t)) = \mathcal{T}(\mathcal{F}(\mathfrak{R}\varphi))(t).$$

Die Behauptung a) bekommt man unter Benutzung von (5.18), indem man auf beide Seiten von (5.19) die inverse Fourier-Transformation $\mathcal{F}^{-1}$ anwendet.

Die Behauptung b) bestätigt man mit einer analogen Argumentation. ■

Lemma 5.4 *Sei $\varphi \in \mathcal{H}_\alpha$ $(\alpha > 0)$. Dann konvergiert das Steklov-Mittel φ_λ gegen φ in der Norm von $\mathcal{H}_\alpha$ für $\lambda \to 0$.*

Beweis. - Sei $\varphi \in \mathcal{H}_\alpha$ $(\alpha > 0)$. Dann gilt:

$$\widehat{\varphi_\lambda}(t) = \int_0^1 e^{\mathrm{i}\,t\lambda\sigma} \, \mathrm{d}\sigma \hat{\varphi}(t) \qquad \text{ffa. } t \in \mathbb{R},$$

woraus wir unmittelbar schließen, daß

$$(5.20)\qquad \begin{aligned} \|\varphi - \varphi_\lambda\|^2_{\mathcal{H}_\alpha} &= \int_{\mathbb{R}} (1+t^2)^\alpha \|\hat{\varphi}(t)\|^2_H \left| \int_0^1 \left(1 - e^{\mathrm{i}\, t\lambda\sigma}\right) \mathrm{d}\sigma \right|^2 \mathrm{d}t \le \\ &\le 2 \int_{\mathbb{R}} (1+t^2)^\alpha \|\hat{\varphi}(t)\|^2_H \int_0^1 (1 - \cos(t\lambda\sigma))\, \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}t = \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}} (1+t^2)^\alpha \|\hat{\varphi}(t)\|^2_H \left(1 - \frac{\sin(t\lambda)}{t\lambda}\right) \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Da die Funktion $t \mapsto \left(1 - \frac{\sin(t\lambda)}{t\lambda}\right)$ auf jedem beschränkten Intervall $[a,b]$ für $\lambda \to 0$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert und nach Voraussetzung gilt: $\|\varphi\|_{\mathcal{H}_\alpha} < +\infty$, strebt das Integral der rechten Seite von (5.20) gegen 0 für $\lambda \to 0$. ∎

Lemma 5.5 *Für jede Funktion $\varphi \in \mathcal{V}$ mit $\varphi' \in \mathcal{V}'$ gilt $\varphi \in \mathcal{H}_{1/2}$. Zusätzlich gilt für beliebige $\varphi, \psi \in \mathcal{V}$ mit $\varphi', \psi' \in \mathcal{V}'$:*

$$(5.21)\qquad \langle \varphi', \psi \rangle = -\overline{\langle \psi', \varphi \rangle} = \mathrm{i} \int_{\mathbb{R}} t(\hat{\varphi}(t), \hat{\psi}(t))_H\, \mathrm{d}t.$$

Beweis. - 1° Identifiziert man den Hilbert-Raum H mit seinem antidualen H', so erhält man die stetigen und dichten Einbettungen

$$V \subset H \subset V'.$$

Mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung zeigt man

$$\|x\|_H \le c\, \|x\|_V^{1/2} \|x\|_{V'}^{1/2} \quad \forall\, x \in V \quad (c = \text{const})$$

(vgl. Lions, Magenes [Lions and Magenes (1968)]).

Sei $\varphi \in \mathcal{V}$ mit $\varphi' \in \mathcal{V}'$. Unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung und dem Satz von Plancherel findet man

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (1+\tau^2)^{1/2} \|\hat{\varphi}(\tau)\|^2_H\, \mathrm{d}\tau &\le \|\varphi\|^2_{\mathcal{H}} + c \int_{\mathbb{R}} |\tau| \|\hat{\varphi}(\tau)\|_V \|\hat{\varphi}(\tau)\|_{V'}\, \mathrm{d}\tau \le \\ &\le \|\varphi\|^2_{\mathcal{H}} + c\, \|\varphi\|_{\mathcal{V}} \|\varphi'\|_{\mathcal{V}'}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich $\varphi \in \mathcal{H}_{1/2}$.

2° Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{V}$ mit $\varphi', \psi' \in \mathcal{V}'$ beliebig gegeben. Mit Hilfe von Lemma 5.4 und der Reflexivität des Raumes $\mathcal{V}'$ findet man unter Verwendung des Steklov-Mittels eine Folge (φ_k) mit $\varphi'_k \in \mathcal{H}$ ($k \in \mathbb{N}$), so daß

$$\varphi_k \to \varphi \quad \text{in} \quad \mathcal{H}_{1/2}, \quad \varphi'_k \rightharpoonup \varphi' \quad \text{in} \quad \mathcal{V}' \quad \text{für} \quad k \to +\infty.$$

Nach Anwendung des Satzes von Plancherel erhält man für alle $k \in \mathbb{N}$

$$(5.22) \qquad \langle \varphi_k', \psi \rangle \;=\; (\varphi_k', \psi)_{\mathcal{H}} \;=\; \mathrm{i} \int_{\mathbb{R}} t\, (\widehat{\varphi}_k(t), \widehat{\psi}(t))_H \,\mathrm{d}t.$$

Die Behauptung (5.21) ergibt sich sofort aus (5.22) nach Ausführung des Grenzüberganges $k \to +\infty$. ■

5.2 Zeitregularität und Existenz der Zeitableitung

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Spurverhalten und die stetige Abhängigkeit bezüglich der Variablen t von Funktionen $u : (a, b) \to X$, deren Zeitableitung in einem geeigneten dualen Raum liegt. Anschließend werden wir die Frage beantworten, unter welchen zusätzlichen Bedingungen die Zeitableitung fast überall existiert.

Wir beginnen mit einigen Bezeichnungen. Sei H ein komplexer Hilbert-Raum und seien $-\infty \le a < b \le +\infty$. Wir definieren

$$W_2^1(a, b; H) := \{u \in L^2(a, b; H) \,|\, u' \in L^2(a, b; H)\}.$$

Auf $W_2^1(a, b; H)$ definieren wir die Norm

$$\|u\|_{W_2^1(a,b;H)} := \Big(\|u\|^2_{L^2(a,b;H)} + \|u'\|^2_{L^2(a,b;H)}\Big)^{1/2},$$

womit dieser Raum ein Banach-Raum ist. Mit dem Skalarprudukt

$$(u, v)_{W_2^1(a,b;H)} := \int_a^b (u(t), v(t))_H \,\mathrm{d}t \;+\; \int_a^b (u'(t), v'(t))_H \,\mathrm{d}t$$

wird $W_2^1(a, b; H)$ zu einem Hilbert-Raum.

Lemma 5.6 1. *Sei $u \in W_2^1(a, b; H)$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. Dann existiert eine absolutstetige Funktion $\tilde{u} : [a, b] \to H$ mit $\tilde{u}(t) = u(t)$ für fast alle $t \in (a, b)$ und es gilt:*

$$(5.23) \qquad \tilde{u}(t) \;=\; \tilde{u}(s) \;+\; \int_s^t u'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad \forall\, a \le s < t \le b.$$

Außerdem gilt die Ungleichung:

$$(5.24) \qquad \|u\|_{C([a,b];H)} \;\le\; \Big(\frac{1}{(b-a)^{1/2}} + 1\Big)\|u\|_{L^2(a,b;H)} \;+\; \|u'\|_{L^2(a,b;H)},$$

das heißt: $W_2^1(a,b;H)$ *ist stetig in* $C([a,b];H)$ *eingebettet.*

2. *Seien* $u, v \in W_2^1(a,b;H)$*. Dann gilt für alle* $a \le t_1 < t_2 \le b$ *die Identität:*

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big((u'(t), v(t))_H + \overline{(v'(t), u(t))_H} \Big)\, \mathrm{d}t = \tag{5.25}$$
$$= (\tilde{u}(t_2), \tilde{u}(t_2))_H - (\tilde{u}(t_1), \tilde{u}(t_1))_H.$$

Beweis. - Unter Verwendung der üblichen Mittelfunktionen zeigt man, daß $C^\infty([a,b];H)$ eine dichte Teilmenge von $W_2^1(a,b;H)$ ist (siehe [Lions and Magenes (1968)]).

1) Seien $u, v \in C^\infty([a,b];H)$. Wir setzen $\psi(t) := (u(t), v(t))_H$ $(t \in [a,b])$. Dann ist $\psi \in C^\infty([a,b])$ und es gilt:

$$\psi'(t) = (u'(t), v(t))_H + \overline{(v'(t), u(t))_H} \quad \forall\, t \in (a,b).$$

Unter Verwendung partieller Integration erhält man für alle $a \le s < t \le b$

$$\int_s^t \Big((u'(\tau), v(\tau))_H + \overline{(v'(\tau), u(\tau))_H} \Big)\, \mathrm{d}\tau = (u(t), v(t))_H - (u(s), v(s))_H. \tag{5.26}$$

Setzt man in die obige Identität insbesondere $u = v$, so bekommt man

$$\|u(t)\|_H^2 = \|u(s)\|_H^2 + 2 \int_s^t \operatorname{Re}(u'(\tau), u(\tau))_H\, \mathrm{d}\tau \quad \forall\, a \le s \le t \le b. \tag{5.27}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung existiert ein $\tau_0 \in [a,b]$, so daß:

$$\|u(\tau_0)\|_H^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b \|u(\tau)\|_H^2\, \mathrm{d}\tau.$$

Dies liefert zusammen mit (5.27) nach Anwendung der Cauchy-Schwarzschen und der Youngschen Ungleichung:

$$\|u(t)\|_H^2 = \Big(\frac{1}{b-a} + 1 \Big) \int_a^b \|u(\tau)\|_H^2\, \mathrm{d}\tau + \int_a^b \|u'(\tau)\|_H^2\, \mathrm{d}\tau \quad \forall\, t \in [a,b],$$

für alle $t \in [a,b]$, was die Ungleichung (5.24) bestätigt.

Sei $\xi \in H$ beliebig gewählt. Dann gehört die Funktion $\varphi(t) := (u(t), \xi)_H$ $(t \in [a,b])$ zu $C^\infty([a,b])$ und es gilt $\varphi'(t) = (u'(t), \xi)_H$ für alle $t \in (a,b)$. Wie oben bekommt man

$$(u(t), \xi)_H = (u(s), \xi)_H + \int_s^t (u'(\tau), \xi)_H\, \mathrm{d}\tau \quad \forall\, a \le s < t \le b.$$

Hieraus folgt für beliebige $a \le s < t \le b$:

$$\Big(u(t) - u(s) - \int_s^t u'(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \xi\Big)_H = 0 \quad \forall \xi \in H,$$

womit auch die Idendität (5.23) bewiesen ist.

2) Sei $u \in W_2^1(a,b;H)$ beliebig. Dann existiert eine Folge $(u_m) \subset C^\infty([a,b];H)$, welche in $W_2^1(a,b;H)$ gegen u konvergiert. Nach (5.24) ist (u_m) eine Cauchy-Folge in $C([a,b];H)$. Also existiert ein $\tilde{u} \in C([a,b];H)$ mit $u_m(t) \to \tilde{u}(t)$ für alle $t \in [a,b]$. Der Satz von Riesz-Fischer liefert nun $\tilde{u}(t) = u(t)$ für fast alle $t \in (a,b)$. Die Gleichung (5.23) folgt dann nach Ausführung des Grenzüberganges $m \to +\infty$. Mit einer analogen Überlegung bestätigt man die Ungleichung (5.24).

Sei eine weitere Funktion $v \in W_2^1(a,b;H)$ gegeben und sei $(v_m) \subset C^\infty([a,b];H)$ eine Folge, die in $W_2^1(a,b;H)$ gegen v konvergiert. Wie oben bewiesen, konvergiert die Folge (v_m) in $C([a,b];H)$ gegen ein $\tilde{v}$. Da die Identität (5.25) für alle u_m und v_m erfüllt ist, folgt die Gültigkeit von (5.25) für u und v nach Ausführung des Grenzüberganges $m \to +\infty$.

■

Sei $1 < p < +\infty$. Sei X ein reflexibler Banach-Raum. Weiterhin existiere ein topologischer Vektorraum Y, so daß X (bzw. H) in Y stetig eingebettet ist. Wir definieren

$$\mathcal{W}_c(a,b) := \{u \in L^p(a,b;X) \cap W_2^1(a,b;H) \mid \operatorname{supp}(u) \subset (a,b)\}.$$

Definition 5.2 *Seien $-\infty \le a < b \le +\infty$. Wir sagen $u \in L^p(a,b;X) \cap L^2(a,b;H)$ besitzt eine* **schwache Ableitung** *$u' \in (L^p(a,b;X) \cap L^2(a,b;H))'$, falls Funktionen $g \in L^{p'}(a,b;X')$ und $h \in L^2(a,b;H)$ existieren, so daß*

$$-\int_a^b (u(t), v'(t))_H\,\mathrm{d}t = \int_a^b \langle g(t), v(t)\rangle\,\mathrm{d}t + \int_a^b (h(t), v(t))_H\,\mathrm{d}t \quad \forall v \in \mathcal{W}_c(a,b).$$ [5)]

Dann setzen wir $u' := g + h$ und definieren den Raum

$$W(a,b;X,H) := \Big\{u \in L^p(a,b;X) \cap L^2(a,b;H) \,|\, u' \in L^{p'}(a,b;X') + L^2(a,b;H)\Big\},$$

der mit der folgenden Norm ausgestattet wird

[5)] Man beachte, daß $(L^p(a,b;X) \cap L^2(a,b;H))'$ zu $L^{p'}(a,b;X') + L^2(a,b;H)$ isomorph ist.

$$\begin{aligned}\|u\|_{W(a,b;X,H)} &:= \|u\|_{L^p(a,b;X)\cap L^2(a,b;H)} + \|u'\|_{(L^p(a,b;X)\cap L^2(a,b;H))'} = \\ &= \|u\|_{L^p(a,b;X)} + \|u\|_{L^2(a,b;H)} + \\ &\quad + \inf\Big\{ \max\{\|g\|_{L^{p'}(a,b;X')}, \|h\|_{L^2(a,b;H)}\} \;\Big|\; \\ &\qquad g \in L^{p'}(a,b;X'), h \in L^2(a,b;H), u' = g + h\Big\}. \end{aligned}$$ ■

Anmerkung 5.2 Sei $u \in W(a,b;X,H)$. Dann ist die Darstellung $u' = g + h$ im allgemeinen nicht eindeutig. Das Elemement $u' \in L^{p'}(a,b;X') + L^2(a,b;H)$ ist jedoch eindeutig bestimmt, was unmittelbar aus der Dichtheit der Menge $\mathcal{W}_c(a,b)$ in $L^p(a,b;X)\cap L^2(a,b;H)$ folgt. ■

Satz 5.1 1. *$W(a,b;X,H)$ $(-\infty \le a < b \le +\infty)$ ist ein Banach-Raum.*

2. *Der Raum $W(a,b;X,H)$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ ist stetig in $C([a,b];H)$ eingebettet, das heißt: für jedes $u \in W(a,b;X,H)$ existiert ein $\iota(u) \in C([a,b];H)$ mit $u(t) = \iota(u)(t)$ für fast alle $t \in (a,b)$.*

3. *Für alle $u, v \in W(a,b;X,H)$ und für alle $a \le t_1 < t_2 \le b$ gilt :*

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \langle u'(t), v(t)\rangle \,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \overline{\langle v'(t), u(t)\rangle} \,\mathrm{d}t = \\ &\quad = (\iota(u)(t_2), \iota(v)(t_2))_H - (\iota(u)(t_1), \iota(v)(t_1))_H. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Beweis. - 1) *Vollständigkeit von $W(a,b;X,H)$*: Sei $(u_m) \subset W(a,b;X,H)$ eine Cauchy-Folge. Dann ist (u_m) eine Cauchy-Folge in dem Banach-Raum $L^p(a,b;X) \cap L^2(a,b;H)$ und (u'_m) eine Cauchy-Folge in dem vollständigen Raum $L^{p'}(a,b;X') + L^2(a,b;H)$. Also konvergiert u_m in $L^p(a,b;X)\cap L^2(a,b;H)$ gegen ein u und $u'_m = g_m + h_m$ in $(L^p(a,b;X)\cap L^2(a,b;H))'$ gegen ein f mit der Darstellung $g + h$ $(g \in L^{p'}(a,b;X'), h \in L^2(a,b;H))$. Es bleibt also noch zu zeigen, daß $u' = g + h$. Sei $v \in \mathcal{W}_c(a,b)$ beliebig gewählt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} -\int_a^b (u(t), v'(t))_H \,\mathrm{d}t &= -\lim_{m\to\infty} \int_a^b (u_m(t), v'(t))_H \,\mathrm{d}t = \\ &= \lim_{m\to\infty} \left(\int_a^b \langle g_m(t), v(t)\rangle \,\mathrm{d}t + \int_a^b (h_m(t), v(t))_H \,\mathrm{d}t \right) = \\ &= \lim_{m\to\infty} \langle u'_m, v\rangle = \langle f, v\rangle = \\ &= \int_a^b \langle g(t), v(t)\rangle \,\mathrm{d}t + \int_a^b (h(t), v(t))_H \,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Dies zeigt, daß $u' = f$. Somit ist $u \in W(a,b;X,H)$ und es gilt:

$$u_m \to u \quad \text{in} \quad W(a,b;X,H) \quad \text{für} \quad m \to +\infty.$$

2) *Stetigkeit von u mit Werten in H*: Sei $u \in W(a,b;X,H)$. Seien $g \in L^{p'}(a,b;X')$ und $h \in L^2(a,b;H)$, so daß $u' = g + h$. Sei $0 < \delta < \dfrac{a-b}{2}$ fixiert. Für $0 < \varepsilon < \delta$ definieren wir das Steklov-Mittel:

$$u_\varepsilon(t) := \frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} u(s)\,\mathrm{d}s \quad (t \in [a, b-\delta]).$$

Dann ist $u_\varepsilon \in L^p(a,b-\delta;X) \cap W_2^1(a,b-\delta;H)$ und es gilt:

$$\int_a^{b-\delta} (u_\varepsilon'(t), v(t))_H\,\mathrm{d}t = -\int_a^{b-\delta} (u_\varepsilon(t), v'(t))_H\,\mathrm{d}t \quad \forall\, v \in \mathcal{W}_{\mathrm{c}}(a,b-\delta).$$

Analog definieren wir $g_\varepsilon \in L^{p'}(a,b-\delta;X')$ und $h_\varepsilon \in L^2(a,b-\delta;H)$.

Sei $v \in \mathcal{W}_{\mathrm{c}}(a,b-\delta)$ beliebig gewählt. Wir setzen v außerhalb von $[a,b-\delta]$ durch 0. Dann gehört die Funktion

$$v_{-\varepsilon}(t) := \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t} v(s)\,\mathrm{d}s \quad (t \in [a,b])$$

zu $\mathcal{W}_{\mathrm{c}}(a,b)$ und unter Verwendung der Transformationsformel und des Satzes von Fubini findet man

$$\begin{aligned}
-\int_a^{b-\delta} (u_\varepsilon(t), v'(t))_H\,\mathrm{d}t &= -\int_a^b (u(t), v_{-\varepsilon}'(t))_H\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_a^b \langle g(t), v_{-\varepsilon}(t)\rangle\,\mathrm{d}t + \int_a^b (h(t), v_{-\varepsilon}(t))_H\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_a^{b-\delta} \langle g_\varepsilon(t), v(t)\rangle\,\mathrm{d}t + \int_a^{b-\delta} (h_\varepsilon(t), v(t))_H\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Somit ist $u_\varepsilon \in W(a,b-\delta;X,H) \cap W_2^1(a,b-\delta;H)$ mit $u_\varepsilon' = g_\varepsilon + h_\varepsilon$.

Nun seien $0 < \varepsilon_i < \delta\,(i = 1,2)$. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung existiert ein $s \in [a,b-\delta]$, so daß

$$\|u_{\varepsilon_1}(s) - u_{\varepsilon_2}(s)\|_H^2 = \frac{1}{b-a-\delta}\int_a^{b-\delta} \|u_{\varepsilon_1}(\tau) - u_{\varepsilon_2}(\tau)\|_H^2\,\mathrm{d}\tau.$$

Mit Hilfe von (5.27) bekommt man für beliebige $t \in [s, b-\delta]$:

$$\begin{aligned}
\|u_{\varepsilon_1}(t) - u_{\varepsilon_2}(t)\|_H^2 \;&=\; \|u_{\varepsilon_1}(s) - u_{\varepsilon_2}(s)\|_H^2 + \\
&\quad + 2\int_s^t \operatorname{Re}(u'_{\varepsilon_1}(\tau) - u'_{\varepsilon_2}(\tau), u_{\varepsilon_1}(\tau) - u_{\varepsilon_2}(\tau))_H \,\mathrm{d}\tau \;= \\
&= \frac{1}{b-a-\delta}\int_a^{b-\delta} \|u_{\varepsilon_1}(\tau) - u_{\varepsilon_2}(\tau)\|_H^2 \,\mathrm{d}\tau + \\
&\quad + 2\int_s^t \operatorname{Re}\langle g_{\varepsilon_1} - g_{\varepsilon_2}, u_{\varepsilon_1}(\tau) - u_{\varepsilon_2}(\tau)\rangle \,\mathrm{d}\tau + \\
&\quad + 2\int_s^t \operatorname{Re}(h_{\varepsilon_1} - h_{\varepsilon_2}, u_{\varepsilon_1}(\tau) - u_{\varepsilon_2}(\tau))_H \,\mathrm{d}\tau \;\leq \\
&\leq \Big(\frac{1}{b-a-\delta} + 1\Big)\|u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}\|^2_{L^p(a,b-\delta;X)\cap L^2(a,b-\delta;H)} + \\
&\quad + \max\Big\{\|g_{\varepsilon_1} - g_{\varepsilon_2}\|^2_{L^{p'}(a,b-\delta;X')}, \|h_{\varepsilon_1} - h_{\varepsilon_2}\|^2_{L^2(a,b-\delta;H)}\Big\}.
\end{aligned}$$

Genauso zeigt man die Gültigkeit der obigen Ungleichung auch für alle $t \in [a,s]$. Dies impliziert

$$\begin{aligned}
\|u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}\|_{C([a,b-\delta];H)} \leq &\Big(\frac{1}{(b-a-\delta)^{1/2}} + 1\Big)\|u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}\|_{L^p(a,b-\delta;X)\cap L^2(a,b-\delta;H)} + \\
&+ \max\{\|g_{\varepsilon_1} - g_{\varepsilon_2}\|_{L^{p'}(a,b-\delta;X')}, \|h_{\varepsilon_1} - h_{\varepsilon_2}\|_{L^2(a,b-\delta;H)}\} \\
\to 0 \quad &\text{für} \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0.
\end{aligned}$$

Wegen der Vollständigkeit des Raumes $C([a,b-\delta];H)$ konvergiert die Folge (u_ε) in $C([a,b-\delta];H)$ gegen ein $\iota(u)_1$. Unter Benutzung des Satzes von Riesz-Fischer erkennt man, daß $\iota(u)_1(t) = u(t)$ für fast alle $t \in [a, b-\delta]$.

Nun definieren wir für $-\delta < \varepsilon < 0$ das Steklov-Mittel $u_\varepsilon \in L^p(a+\delta,b;X) \cap L^2(a+\delta,b;H)$. Analog wie oben zeigt man, daß (u_ε) in $C([a+\delta,b];H)$ gegen eine Funktion $\iota(u)_2$ konvergiert, die fast überall auf $[a+\delta, b]$ mit u übereinstimmt. Weiterhin ist nun leicht zu sehen, daß $\iota(u)_1(t) = \iota(u)_2(t)$ für fast alle $t \in (a+\delta, b-\delta)$. Aus der Stetigkeit dieser Funktionen ergibt sich $\iota(u)_1 \equiv \iota(u)_2$ auf $(a+\delta, b-\delta)$. Dann gehört die Funktion

$$\iota(u)(t) := \begin{cases} \iota(u)_1(t) & \text{für} \quad a \leq t \leq \dfrac{a+b}{2} \\[2ex] \iota(u)_2(t) & \text{für} \quad \dfrac{a+b}{2} < t \leq b. \end{cases}$$

zu $C([a,b];H)$ und stimmt auf (a,b) fast überall mit u überein.

3) Seien $u, v \in W(a,b;X,H)$. Seien $a \leq t_1 < t_2 < b$ beliebig gewählt. Für $0 < \varepsilon < b - t_2$ bezeichne u_ε (bzw. v_ε) das Steklov-Mittel von u (bzw. v) auf $[t_1, t_2]$. Nach Anwendung von (5.25) haben wir:

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle u_\varepsilon'(t), v_\varepsilon(t)\rangle \,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \overline{\langle v_\varepsilon'(t), u_\varepsilon(t)\rangle} \,\mathrm{d}t =$$
$$= (u_\varepsilon(t_2), v_\varepsilon(t_2))_H - (u_\varepsilon(t_1), v_\varepsilon(t_1))_H.$$

Beachtet man

$$u_\varepsilon(t) \to \iota(u)(t), \quad v_\varepsilon(t) \to \iota(u)(t) \quad \text{für} \quad \varepsilon \to 0 \quad \forall\, t \in [t_1, t_2],$$

so ergibt sich die Identität (5.28) aus der obigen Gleichung nach Ausführung des Grenzüberganges $\varepsilon \to 0$. ∎

Folgerung 5.3 1. *Sei $-\infty \le a < b \le +\infty$. Für jedes $u \in W(a,b;X,H)$ existiert ein $\iota(u) \in BC(a,b;H)$, so daß $u(t) = \iota(u)(t)$ für fast alle $t \in (a,b)$ und es gilt die Abschätzung:*

$$\sup_{t\in(a,b)} \|\iota(u)(t)\|_H \le \|u\|_{W(a,b;X,H)}.$$

2. *Für alle $u, v \in W(a,b;X,H)$ und für jedes $a < t_1 < t_2 < b$ gilt die Identität:*

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle u'(t), v(t)\rangle \,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \overline{\langle v'(t), u(t)\rangle} \,\mathrm{d}t = \tag{5.29}$$
$$= (\iota(u)(t_2), \iota(u)(t_2))_H - (\iota(u)(t_1), \iota(u)(t_1))_H.$$

3. *Im Fall $a = -\infty$ und $b = +\infty$ haben wir*

$$\int_{\mathbb{R}} \langle u'(t), v(t)\rangle \,\mathrm{d}t = -\int_{\mathbb{R}} \overline{\langle v'(t), u(t)\rangle} \,\mathrm{d}t \quad \forall\, u, v \in W(\mathbb{R}; X, H). \tag{5.30}$$

Beweis.- 1) *Der Fall $a = -\infty, b = +\infty$*: Sei $u \in W(\mathbb{R}; X, H)$ beliebig gewählt. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gehört die Einschränkung von u auf $(-n,n)$ zu $W(-n,n;X,H)$. Nach Satz 5.1 existiert ein $u_n \in C([-n,n];H)$, so daß $u(t) = u_n(t)$ für fast alle $t \in (-n,n)$ mit

$$\|u_n\|_{C([-n,n];H)} \le \Big(\frac{1}{\sqrt{2n}} + 1\Big)\|u\|_{L^p(-n,n;X)\cap L^2(-n,n;H)} +$$
$$+ \|u'\|_{(L^p(-n,n;X)\cap L^2(-n,n;H))'}.$$

Seien $n, k \in \mathbb{N}$ $(k \le n)$. Wie man sich leicht klarmacht gilt $u_n(t) = u_k(t)$ für alle $t \in [-k,k]$, was die Stetigkeit der Funktion

$$\iota(u)(t) := u_n(t) \quad \text{falls} \quad t \in [-n,n]$$

beweist. Mit Hilfe der obigen Ungleichung bestätigt man

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\iota(u)(t)\|_H \;\le\; \|u\|_{W(\mathbb{R};X,H)}. \tag{5.31}$$

Seien $u, v \in W(\mathbb{R}; X, H)$. Da die Einschränkungen von u und v auf jedes beschränkte Intervall $[a, b]$ zu $W(a, b; X, H)$ gehört, folgt die Identität (5.29) unmittelbar aus Satz 5.1. Weiterhin haben wir $\iota(u), \iota(v) \in L^2(\mathbb{R}; H)$, also ist die Funktion $t \mapsto (\iota(u)(t), \iota(v)(t))_H$ über $\mathbb{R}$ integrierbar. Somit gibt es Zahlen $a_j \to -\infty$ und $b_j \to +\infty$ für $j \to +\infty$, so daß $(\iota(u)(a_j), \iota(v)(a_j))_H \to 0$ und $(\iota(u)(b_j), \iota(v)(b_j))_H \to 0$ für $j \to +\infty$. Wegen (5.29) haben wir

$$\int_{a_j}^{b_j} \langle u'(t), v(t)\rangle \,\mathrm{dt} + \int_{a_j}^{b_j} \overline{\langle v'(t), u(t)\rangle} \,\mathrm{dt} =$$

$$= (\iota(u)(b_j), \iota(u)(b_j))_H - (\iota(u)(a_j), \iota(u)(a_j))_H,$$

was die Behauptung (5.30) nach Ausführung des Grenzüberganges $j \to +\infty$ bestätigt.

2. *Der Fall* $a = -\infty$ *oder* $b = +\infty$: Sei $u \in W(a, b; X, H)$. Da die Einschränkung von u auf ein beliebiges beschränktes Intervall (t_1, t_2) zu $W(t_1, t_2; X, H)$ gehört, folgt die Behauptung wie im obigen Fall aus Satz 5.1. ■

Der Operator der Zeitableitung

Als nächstes untersuchen wir den Operator der Zeitableitung und weisen die notwendigen Voraussetzungen nach, um weiter unten einen abstrakten Existenzsatz für eine parabolische Gleichung anzuwenden, der auf Lions zurückgeht (siehe in [Lions (1972)]).

Satz 5.2 *Wir definieren* $Lu := u'$ $(u \in W(a, b; X, H))$. *Setzt man*

$$D(L) = W_0(a, b; X, H) := \{u \in W(a, b; X, H) \,|\, \iota(u)(a) = 0\},$$

so ist der Operator

$$L : D(L) \subset L^p(a, b; X) \cap L^2(a, b; H) \to (L^p(a, b; X) \cap L^2(a, b; H))'$$

abgeschlossen, positiv und maximal monoton. [6)]

Beweis. - 1) Die Abgeschlossenheit des Operators L folgt unmittelbar aus der Vollständigkeit des Raumes $W_0(a, b; X, H)$.

2) *Positivität von* L: Sei $u \in D(L)$. Dann folgt mit Hilfe von (5.28) $(u = v)$

[6)] Zur Definition der maximalen Monotonie siehe zum Beispiel in [Lions (1972)].

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{Re}\langle Lu, u\rangle \;&=\; \int_a^b \langle u'(t), u(t)\rangle \,\mathrm{d}t \;+\; \int_a^b \overline{\langle u'(t), u(t)\rangle}\,\mathrm{d}t \;= \\ &=\; \|\iota(u)(b)\|_H^2 \;\geq\; 0. \end{aligned}$$

3) *Maximale Monotonie*: Seien $f \in (L^p(a,b;X) \cap L^2(a,b;H))'$ und $u \in L^p(a,b;X) \cap L^2(a,b;H)$, so daß

$$\mathrm{Re}\langle v' - f, v - u\rangle \;\geq\; 0 \quad \forall\, v \in W_0(a,b;X,H). \tag{5.32}$$

Beachtet man (5.32), so folgt für alle $v \in \mathcal{W}_\mathrm{c}(a,b)$ mit $\|v\|_{L^p(a,b;X)\cap L^2(a,b;H)} \leq 1$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\langle v', u\rangle \;&\leq\; \mathrm{Re}\langle v', v\rangle \;-\mathrm{Re}\langle f, v\rangle \;+\; \mathrm{Re}\langle f, u\rangle \;= \\ &=\; -\,\mathrm{Re}\langle f, v\rangle \;+\; \mathrm{Re}\langle f, u\rangle \;\leq \\ &\leq\; \|f\|_{(L^p(a,b;X)\cap L^2(a,b;H))'}(1 + \|u\|_{L^p(a,b;X)\cap L^2(a,b;H)}). \end{aligned}$$

Da $\mathcal{W}_\mathrm{c}(a,b)$ in $L^p(a,b;X)\cap L^2(a,b;H)$ dicht ist, existiert ein $\tilde{f} \in (L^p(a,b;X)\cap L^2(a,b;H))'$, so daß :

$$-\int_a^b (u(t), v'(t))_H \,\mathrm{d}t \;=\; \langle \tilde{f}, v\rangle \quad \forall\, v \in \mathcal{W}_\mathrm{c}(a,b).$$

Also ist $u \in W(a,b;X,H)$.

Als nächstes sei $0 < h < b - a$ beliebig gewählt. Wir setzen

$$\varphi(t) := \begin{cases} \dfrac{t-a}{h} & \text{für} \quad a \leq t \leq a+h \\ 1 & \text{für} \quad a+h < t \leq b. \end{cases}$$

Dann gehört $v := u\varphi$ zu $D(L)$ und es gilt:

$$v'(t) = \begin{cases} \dfrac{t-a}{h}u'(t) \;+\; \dfrac{u(t)}{h} & \text{für} \quad a \leq t \leq a+h \\ u'(t) & \text{für} \quad a+h < t \leq b. \end{cases}$$

Aus (5.32) (mit $v = u\varphi$) folgt dann

$$\mathrm{Re}\langle u'\varphi + u\varphi' - f, (1-\varphi)u\rangle \;\leq\; 0.$$

Aus dieser Ungleichung schließt man

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2h}\int_a^{a+h/2} \|\iota(u)(t)\|_H^2 \,\mathrm{d}t \;&\le\; \frac{1}{h}\int_a^{a+h/2}\Big(1-\frac{t-a}{h}\Big)\|u(t)\|_H^2 \,\mathrm{d}t \;\le \\
&\le\; \frac{1}{h}\int_a^{a+h}\Big(1-\frac{t-a}{h}\Big)\|u(t)\|_H^2 \,\mathrm{d}t \;= \\
&=\; \int_a^{a+h} (\varphi' u, (1-\varphi)u)_H \,\mathrm{d}t \;\le \\
&\le\; \int_a^{a+h} (1-\varphi(t))|\langle f(t), u(t)\rangle| \,\mathrm{d}t - \int_a^{a+h} \varphi(t)(1-\varphi(t))|\langle u'(t), u(t)\rangle| \,\mathrm{d}t \;\le \\
&\le\; \int_a^{a+h} \Big(|\langle f(t), u(t)\rangle| \;+\; |\langle u'(t), u(t)\rangle|\Big) \,\mathrm{d}t \to 0 \quad \text{für} \quad h \to 0.
\end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von $\iota(u)$ folgt hieraus $\iota(u)(a) = 0$. Somit gehört u zu $D(L)$.

Nun sei $w \in D(L)$ beliebig fixiert. Sei $t > 0$. Aus (5.32) mit $v = u + tw$ folgert man

$$\mathrm{Re}\langle u', w\rangle \;\ge\; \mathrm{Re}\langle f, w\rangle - t\,\mathrm{Re}\langle w', w\rangle.$$

Dies impliziert nach Ausführung des Grenzüberganges $t \to 0$

$$\mathrm{Re}\langle u', w\rangle \;\ge\; \mathrm{Re}\langle f, w\rangle.$$

Ersetzt man oben t durch $-t$, so folgt die umgekehrte Ungleichung. Zusammen erhält man

$$\mathrm{Re}\langle u' - f, w\rangle \;=\; 0 \quad \forall\, w \in D(L).$$

Ferner existiert ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$, so daß

$$\begin{aligned}
|\langle u' - f, w\rangle| \;&=\; \lambda\langle u' - f, w\rangle \;=\; \langle u' - f, \overline{\lambda} w\rangle \;= \\
&=\; \mathrm{Re}\langle u' - f, \overline{\lambda} w\rangle \;=\; 0.
\end{aligned}$$

Somit ist $\langle u' - f, w\rangle = 0$ für jedes $w \in D(L)$. Aus der Dichtheit der Menge $D(L)$ in $L^p(a,b;X) \cap L^2(a,b;H)$ folgt schließlich $u' = f$. ■

Der Raum $H^{1/2}(a,b;H)$

Wie in Kaplan [Kaplan (1966)] definieren wir

$$\begin{aligned}
H_a^{1/2}(a,b;H) \;&:=\; \Big\{\varphi \in H^{1/2}(a,b;H) \;\Big|\; \int_a^b \frac{\|\varphi(s)\|_H^2}{s-a}\,\mathrm{d}s < +\infty\Big\}; \\
{}^*H_a^{1/2}(a,b;H) \;&:=\; \Big\{\varphi \in H^{1/2}(a,b;H) \;\Big|\; \exists\, \varphi_a \in H : \varphi - \varphi_a \in H_a^{1/2}(a,b;H)\Big\}.
\end{aligned}$$

Die Norm auf ${}^*H_a^{1/2}(a,b;H)$ ist gegeben durch die Vorschrift:

$$\|\varphi\|^2_{{}^*H_a^{1/2}(a,b;H)} := \frac{1}{\sigma_{1/2}}\left(\int_a^b\int_a^b \frac{\|\varphi(s)-\varphi(t)\|_H^2}{(s-t)^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t + \int_a^b \frac{\|\varphi(s)-\varphi_a\|_H^2}{s-a}\,\mathrm{d}s\right),$$

womit dieser zu einem Banach-Raum wird. Auf analoge Weise definiert man die Räume $H_b^{1/2}(a,b;H)$ und ${}^*H_b^{1/2}(a,b;H)$ (vgl. auch [Kaplan (1966)]).

Anmerkung 5.3 1. Sei $\varphi \in H_a^{1/2}(a,b;H)$. Dann gehört die auf $(-\infty,a)$ durch 0 fortgesetzte Funktion $\tilde{\varphi}$ zu $H^{1/2}(-\infty,b;H)$. In der Tat, haben wir

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^b\int_{-\infty}^b \frac{\|\tilde{\varphi}(s)-\tilde{\varphi}(t)\|_H^2}{(s-t)^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \\
&\quad = \int_a^b\int_a^b \frac{\|\varphi(s)-\varphi(t)\|_H^2}{(s-t)^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t + 2\int_{-\infty}^a\int_a^b \frac{\|\varphi(s)\|_H^2}{(s-t)^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \\
&\quad = \int_a^b\int_a^b \frac{\|\varphi(s)-\varphi(t)\|_H^2}{(s-t)^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t + 2\int_a^b \frac{\|\varphi(s)\|_H^2}{s-a}\,\mathrm{d}s < +\infty.
\end{aligned}$$

In den nachfolgenden Betrachtungen sei X ein reflexiver Banach-Raum, der außerdem der Bedingung $(\mathfrak{R})_p$ $(1<p<+\infty)$ bezüglich H genüge (vgl. Definition 5.1). Das folgende Regularitätsresultat stellt eine Verallgemeinerung von Lemma 5.5 dar.

Satz 5.3 *Sei $u \in W(\mathbb{R};X,H)$.*

1. *Es gilt $\iota(u) \in \mathcal{H}_{1/2}$. Außerdem haben wir die a-priori-Abschätzung:*

$$(5.33)\qquad \|\iota(u)\|_{\mathcal{H}_{1/2}} \le c_1\,\|u\|_{W(a,b;X,H)}$$

$(c_1 = \mathrm{const})$.

2. *Sei $t_0 \in \mathbb{R}$. Falls $\iota(u)(t_0) \in X \cap H$, so genügt $\iota(u)$ im Punkt t_0 der Kaplan-Bedingung*

$$(5.34)\qquad \int_{t_0}^{\infty} \frac{\|\iota(u)(t)-\iota(u)(t_0)\|_H^2}{t-t_0}\,\mathrm{d}t < +\infty.$$

Beweis. - 1) Sei $u \in W(\mathbb{R};X,H)$. Für $\varepsilon > 0$ bezeichne u_ε das Steklov-Mittel von u. Es gilt $u_\varepsilon \in W(\mathbb{R};X,H)$ und $u_\varepsilon \in \mathcal{H}_1$. Da X der Bedingung $(\mathfrak{R})_p$ bezüglich H genügt, ist $\mathfrak{R}u_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R};X)$ und $u_\varepsilon \in \mathcal{H}_1$. Mit Hilfe des Satzes von Plancherel findet man

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |t| \|\widehat{u_\varepsilon}(t)\|_H^2 \,\mathrm{d}t &= -\int_{\mathbb{R}} (u_\varepsilon(t), (\mathfrak{R}u_\varepsilon)'(t))_H \,\mathrm{d}t = \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \langle u_\varepsilon'(t), \mathfrak{R}u_\varepsilon(t)\rangle \,\mathrm{d}t \le \\ &\le \|u_\varepsilon'\|_{(L^p(\mathbb{R};X)\cap L^2(\mathbb{R};H))'} \|\mathfrak{R}u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R};X)\cap L^2(\mathbb{R};H)} \le \\ &\le c\,\|u'\|_{(L^p(\mathbb{R};X)\cap L^2(\mathbb{R};H))'} \|u\|_{L^p(\mathbb{R};X)\cap L^2(\mathbb{R};H)}.\end{aligned}$$

Somit ist (u_ε) in $\mathcal{H}_{1/2}$ beschränkt. Aufgrund der Reflexivität von $\mathcal{H}_{1/2}$ existiert eine Folge positiver Zahlen (ε_j) mit $\lim\limits_{j\to\infty} \varepsilon_j = 0$ und eine Funktion $v \in \mathcal{H}_{1/2}$, so daß

$$u_{\varepsilon_j} \rightharpoonup v \quad \text{in} \quad \mathcal{H}_{1/2} \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

Berücksichtigt man außerdem die Eigenschaft $\|u_\varepsilon - \iota(u)\|_{L^2(\mathbb{R};H)} \to 0$ für $\varepsilon \to 0$, so erhält man $\iota(u)(t) = v(t)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$. Die Ungleichung (5.33) folgt unmittelbar aus der letzten Abschätzung unter Benutzung der schwachen Unterhalbstetigkeit der Norm.

2) *Beweis von* (5.34): Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $\iota(u)(t_0) \in X \cap H$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $t_0 = 0$ annehmen. Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt. Wir definieren

$$v(t) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -\infty < t < -k-1 \\ (t+1+k)\iota(u)(0) & \text{für} \quad -k-1 \le t < -k \\ \iota(u)(0) & \text{für} \quad -k \le t \le 0 \\ u(t) & \text{für} \quad 0 < t < +\infty. \end{cases}$$

Sei $\varphi \in \mathcal{W}_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$ beliebig fixiert. Dann haben wir

$$\begin{aligned}-\int_{\mathbb{R}} (v(t), \varphi'(t))_H \,\mathrm{d}t &= -\int_{-k-1}^{0} (v(t), \varphi'(t))_H \,\mathrm{d}t - \int_0^\infty (u(t), \varphi'(t))_H \,\mathrm{d}t = \\ &= \int_{-k-1}^{-k} (\iota(u)(0), \varphi(t))_H \,\mathrm{d}t - (\iota(u)(0), \iota(\varphi)(0))_H + \\ &\quad + \int_0^\infty \langle u'(t), \varphi(t)\rangle \,\mathrm{d}t + (\iota(u)(0), \iota(\varphi)(0))_H = \\ &= \int_{-k-1}^{-k} (\iota(u)(0), \varphi(t))_H \,\mathrm{d}t + \int_0^\infty \langle u'(t), \varphi(t)\rangle \,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$v'(t) = \begin{cases} \iota(u)(0) & \text{für} \quad -k-1 < t < -k \\ u'(t) & \text{für} \quad 0 < t < +\infty \\ 0 & \text{für} \quad t \in (-\infty, 0) \setminus (-k-1, -k), \end{cases}$$

also ist $v \in W(\mathbb{R}; X, H)$, und nach 1) ist $\iota(v) \in \mathcal{H}_{1/2}$. Dies impliziert

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{\|\iota(v)(t)-\iota(v)(s)\|_H^2}{(t-s)^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t &\geq \int_0^\infty \int_{-k}^0 \frac{\|\iota(u)(t)-\iota(u)(0)\|_H^2}{(s-t)^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^\infty k\frac{\|\iota(u)(t)-\iota(u)(0)\|_H^2}{t(t+k)}\,\mathrm{d}t \geq \\ &\geq \frac{1}{2}\int_0^k \frac{\|\iota(u)(t)-\iota(u)(0)\|_H^2}{t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Die Behauptung (5.34) ergibt sich nun aus der obigen Abschätzung unter Verwendung des Satzes von Beppo-Levi. ■

Existenz der Zeitableitung

Satz 5.4 *Sei $1 < p < +\infty$. Sei X ein reflexibler Banach-Raum, welcher der Eigenschaft $(\mathfrak{R})_p$ bezüglich H genügt. Sei $u \in W(\mathbb{R}; X, H)$. Ferner mögen Zahlen $0 < \alpha, \beta \leq 1$ mit $\alpha + \beta > 1$ und $g \in L^{p'}(\mathbb{R}; X')$ sowie $f \in \mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}; H)$ existieren, so daß*

$$u' = f + g; \tag{5.35}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \|u(t+h)-u(t)\|_X^p\,\mathrm{d}t \leq c_0\,h^{p\alpha} \quad \forall\, h>0 \quad (c_0 = \text{const}); \tag{5.36}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \|g(t+h)-g(t)\|_{X'}^{p'}\,\mathrm{d}t \leq c_1\,h^{p'\beta} \quad \forall\, h>0 \quad (c_1 = \text{const}). \tag{5.37}$$

Dann gilt:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \in L^2(\mathbb{R}; H). \tag{5.38}$$

Beweis. - Seien $g \in L^{p'}(\mathbb{R}; X')$ und $f \in L^2(\mathbb{R}; H)$, so daß die Bedingungen (5.35), (5.36) und (5.37) erfüllt sind. Für alle $v \in L^p(\mathbb{R}; X) \cap W_2^1(\mathbb{R}; H)$ haben wir die Identität

$$-\int_{\mathbb{R}} (u(t), v'(t))_H\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \langle g(t), v(t)\rangle\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} (f(t), v(t))_H\,\mathrm{d}t. \tag{5.39}$$

Sei $h \in (0,1)$ beliebig gewählt. Nun bilden wir in (5.39) die Differenz Δ_h und setzen dort $v := -\mathfrak{R}(\Delta_h u_\lambda)$ $(\lambda \neq 0)$ ein. Berücksichtigt man $u \in \mathcal{H}_{1/2}$ (siehe Satz 5.3), so bekommt man mit Hilfe des Satzes von Plancherel nach Ausführung des Grenzüberganges $\lambda \to 0$

$$\int_{\mathbb{R}} |t| \|\widehat{\Delta_h u}(t)\|_H^2 \, \mathrm{d}t \;=\; -\int_{\mathbb{R}} \langle (\Delta_h g)(t), (\mathfrak{R}\Delta_h u)(t) \rangle \, \mathrm{d}t$$
$$- \int_{\mathbb{R}} ((\Delta_h f)(t), (\mathfrak{R}\Delta_h u)(t))_H \, \mathrm{d}t.$$

Hieraus folgt unter Beachtung der Bedingungen (5.36) und (5.37) mit Hilfe von (5.5) und Anwendung der Hölderschen Ungleichung, der Interpolationsungleichung (5.12) (mit $\alpha = 1/2, \beta = -1/2$ und $\theta = 1/2$) und der Youngschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \|\Delta_h u\|^2_{\mathcal{H}_{1/2}} \le \|\Delta_h u\|^2_{\mathcal{H}} + c \left(\int_{\mathbb{R}} \|\Delta_h g\|^{p'}_{X'} \, \mathrm{d}t \right)^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}} \|\Delta_h u\|^p_X \, \mathrm{d}t \right)^{1/p} + \\ + \int_{\mathbb{R}} ((\Delta_h f)(t), (\Delta_h u)(t))_H \, \mathrm{d}t \;\le \\ \le\; c \left(h^{\alpha+\beta} \;+\; \|\Delta_h f\|^2_{\mathcal{H}_{-1/2}} \right) \;+\; 2 \, \|\Delta_h u\|^2_{\mathcal{H}_{-1/2}} \;+\; \frac{1}{2} \|\Delta_h u\|^2_{\mathcal{H}_{1/2}}. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Wir dividieren nun beide Seiten von (5.40) durch h^2, integrieren über das Intervall $(0, 1)$ und wenden anschließend die Folgerung 5.1 an. Dies impliziert

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}h}{h^2} \|\Delta_h u\|^2_{\mathcal{H}_{1/2}} \;\le\; \frac{c}{\alpha + \beta - 1} + \\ + \; c \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}h}{h^2} \|\Delta_h f\|^2_{\mathcal{H}_{-1/2}} \;+\; 4 \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}h}{h^2} \|\Delta_h u\|^2_{\mathcal{H}_{-1/2}} \;\le \\ \le\; c \left(1 + \|u\|^2_{\mathcal{H}} + \|f\|^2_{\mathcal{H}} \right) < +\infty. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich mit Hilfe von (5.10) (mit $\alpha = 1$ und $\theta = 1/2$) $\mathcal{G}_{1/2} u \in \mathcal{H}_{1/2}$. Dies impliziert nach Lemma 5.1 $\mathcal{G}_1 u \in \mathcal{H}$, was äquivalent ist zu $u \in \mathcal{H}_1$. Die Behauptung des Satzes folgt nun unmittelbar aus Anmerkung 5.1, d). ■

5.3 Eigenschaften des Operators der Zeitableitung

Für den Laplace-Operator $-\Delta : H_0^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ erhält man:

$$(-\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} \;=\; (\nabla u, \nabla v)_{[L^2(\Omega)]^n} = a(u, v).$$

Der Laplace-Operator erzeugt somit eine koerzive Bilinearform auf dem Raum $H_0^1(\Omega)$. Die Situation stellt sich etwas schwieriger dar, wenn man eine ähnliche Betrachtung für den Operator $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} : H_0^1(0, T; H) \to L^2(0, T; H)$ unter Verwendung des Raumes $H^{1/2}(0, T; H)$ durchführt. Unser Ziel ist es, mit Hilfe der Hilbert-Transformation, den Operator der Zeitableitung in natürlicher Weise als Bilinearform darzustellen. Dies ist möglich, falls man diesen Operator unter Verwendung eines geeigneten Hilbert-Raumes auf ganz $\mathbb{R}$ betrachtet. Diese Resultate werden einen entscheidenden Beitrag für die Lösung eines abstrakten nichtlinearen parabolischen Anfangswertproblems leisten, wobei auf der rechten Seite ein distributiver Term $h \in (H_T^{1/2}(0,T;H))'$ vorkommen darf. Dies stellt somit eine echte Erweiterung der Lösungstheorie nichtlinearer parabolischer Gleichungen dar. Ein analoges Resultat wurde von Kaplan in [Kaplan (1966)] für eine lineare parabolische Gleichung erzielt. Die von Kaplan benutzte Methode stützt sich vorwiegend auf Resultate für lineare stetige Operatoren in Banach-Räumen und läßt sich deshalb nicht auf den nichtlinearen Fall übertragen.

Der Raum $\mathcal{H}_*^{1/2}$

Wir beginnen mit der Definition eines geeigneten Hilbert-Raumes von Funktionen, die eine halbe Ableitung auf $\mathbb{R}$ besitzen, aber nur zu $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R};H)$ gehören.

Definition 5.3 *Wir bezeichnen mit $\mathcal{H}_*^{1/2}$ den Vektorraum aller $u \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R};H)$ mit*

$$|u|^2_{1/2} := \frac{1}{\sigma_{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\|u(s)-u(t)\|^2_H}{(s-t)^2}\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}s < +\infty. \qquad \blacksquare$$

Satz 5.5 *Der Raum $\mathcal{H}_*^{1/2}$ ausgestattet mit der Norm*

$$\|u\|_{\mathcal{H}_*^{1/2}} := \left(\int_{-1}^0 \|u(t)\|^2_H\, \mathrm{d}t + \frac{1}{\sigma_{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\|u(s)-u(t)\|^2_H}{(s-t)^2}\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}s \right)^{1/2}$$

ist ein Banach-Raum.

Beweis. - 1° Sei $a \geq 1$ beliebig gewählt. Dann gibt es eine Konstante $c(a)$:

$$\int_{-a}^{a} \|u(t)\|^2_H\, \mathrm{d}t \leq c(a) \|u\|^2_{\mathcal{H}_*^{1/2}} \quad \forall\, u \in \mathcal{H}_*^{1/2}, \tag{5.41}$$

denn sonst gäbe es für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $u_m \in \mathcal{H}_*^{1/2}$ mit

$$\int_{-a}^{a} \|u_m(t)\|^2_H\, \mathrm{d}t > m \|u_m\|^2_{\mathcal{H}_*^{1/2}} \quad \text{und} \quad \int_{-a}^{a} \|u_m(t)\|^2_H\, \mathrm{d}t + \|u_m\|^2_{\mathcal{H}_*^{1/2}} = 1$$

$(m \in \mathbb{N})$, was impliziert, daß

$$\|u_m\|_{\mathcal{H}_*^{1/2}} \to 0, \quad \|u_m\|_{L^2(-a,a;H)} \to 1 \quad \text{für} \quad m \to +\infty.$$

Setzt man

$$\varphi_m(t) := \|u(t)\|_H \quad (t \in (-a,a);\ m \in \mathbb{N}),$$

so folgt mit Hilfe der Dreiecksgleichung:

$$\begin{cases} (\varphi_m) \subset H^{1/2}((-a,a)) \text{ ist beschränkt;} \\ |\varphi_m|_{H^{1/2}((-a,a))} \to 0, \quad \|\varphi_m\|_{L^2((-1,0))} \to 0, \\ \|\varphi_m\|_{L^2((-a,a))} \to 1 \quad \text{für} \quad m \to +\infty. \end{cases}$$

Unter Berücksichtigung der Kompaktheit der Einbettung $H^{1/2}((-a,a)) \subset L^2((-a,a))$ und der Reflexivität des Raumes $H^{1/2}((-a,a))$ findet man eine Teilfolge $(\varphi_{m_j}) \subset (\varphi_m)$ und ein $\varphi \in H^{1/2}((-a,a))$:

$$\begin{cases} \varphi_{m_j} \rightharpoonup \varphi \quad \text{in} \quad H^{1/2}((-a,a)), \quad \varphi_{m_j} \to \varphi \quad \text{in} \quad L^2((-a,a)) \\ \text{für} \quad j \to +\infty. \end{cases}$$

Hieraus folgt sofort

$$\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} \frac{(\varphi(s)-\varphi(t))^2}{(s-t)^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \;=\; 0, \qquad \int_{-a}^{a} \varphi^2(t)\,\mathrm{d}t = 1,$$

also ist

$$\varphi \equiv \text{const} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch zu

$$\int_{-1}^{0} \varphi_{m_j}(t)^2\,\mathrm{d}t \to \int_{-1}^{0} \varphi^2(t)\,\mathrm{d}t \;=\; 0 \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

2° Sei $(u_m) \in \mathcal{H}_*^{1/2}$ eine Cauchy-Folge. Aus (5.41) folgt:

$$\left(u_m\big|_{(-a,a)}\right) \quad \text{ist eine Cauchy-Folge in} \quad H^{1/2}(-a,a;H) \quad \forall\, a > 1.$$

Aufgrund der Vollständigkeit der Räume $H^{1/2}(-a,a;H)$ $(a>1)$ existiert genau eine Funktion $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$, so daß

$$u_m\big|_{(-a,a)} \to u\big|_{(-a,a)} \quad \text{in} \quad H^{1/2}(-a,a;H) \quad \text{für} \quad m \to +\infty \quad (a>1).$$

Insbesondere erhält man

$$\|u - u_m\|_{L^2(-1,0;H)} \to 0 \quad \text{für} \quad m \to +\infty.$$

Darüber hinaus haben wir für beliebiges $a > 1$:

$$\frac{1}{\sigma_{1/2}} \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} \frac{\|u(s) - u(t)\|_H^2}{(s-t)^2} \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}t =$$
$$= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\sigma_{1/2}} \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} \frac{\|u_m(s) - u_m(t)\|_H^2}{(s-t)^2} \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}t \le \sup_{m\in\mathbb{N}} \|u_m\|_{\mathcal{H}_*^{1/2}}^2 < +\infty.$$

Hiermit erhält man mit Hilfe des Satzes von Beppo-Levi

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\|u(s) - u_(t)\|_H^2}{(s-t)^2} \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t < +\infty.$$

Also ist $u \in \mathcal{H}_*^{1/2}$.

Es bleibt nun noch zu zeigen, daß u_m gegen u in $\mathcal{H}_*^{1/2}$ konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Dann existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$:

$$\|u_m - u_{m_0}\|_{\mathcal{H}_*^{1/2}}^2 \le \frac{\varepsilon}{6} \quad \forall\, m \ge m_0.$$

Wegen

$$\lim_{a\to\infty} |u - u_{m_0}|_{H^{1/2}(-a,a;H)}^2 = |u - u_{m_0}|_{1/2}^2$$

existiert ein $a_0 > 1$, so daß

$$|u - u_{m_0}|_{1/2}^2 \le |u - u_{m_0}|_{H^{1/2}(-a_0,a_0;H)}^2 + \frac{\varepsilon}{6}.$$

Da u_m in $H^{1/2}(-a_0, a_0; H)$ gegen u konvergiert, gilt:

$$\|u - u_{m_0}\|_{H^{1/2}(-a_0,a_0;H)}^2 \le \frac{\varepsilon}{6}.$$

Für $m \ge m_0$ erhält man unter Benutzung der Dreiecksungleichung

$$|u - u_m|_{1/2}^2 \le 2|u - u_{m_0}|_{1/2}^2 + 2|u_{m_0} - u_m|_{1/2}^2 \le$$
$$\le \frac{\varepsilon}{3} + 2|u - u_{m_0}|_{H^{1/2}(-a_0,a_0;H)}^2 + 2|u_{m_0} - u_m|_{1/2}^2 \le \varepsilon.$$

Dies bestätigt die Konvergenz der Folge (u_m) gegen u in $\mathcal{H}_*^{1/2}$. ■

Anmerkung 5.4 1. $\mathcal{H}_*^{1/2}$ ist ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt

$$\begin{aligned}(u,v)_{\mathcal{H}_*^{1/2}} &= \int_{-1}^{0} (u(t),v(t))_H \,\mathrm{d}t + \\ &+ \frac{1}{\sigma_{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{(u(s)-u(t),(v(s)-v(t))_H}{(s-t)^2} \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \quad (u,v \in \mathcal{H}_*^{1/2}).\end{aligned}$$

2. Aus (5.3) erhält man

$$\|u\|^2_{\mathcal{H}_*^{1/2}} = \int_{-1}^{0} \|u(t)\|_H^2 \,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} |t| \|\hat{u}(t)\|_H^2 \,\mathrm{d}t \quad \forall\, u \in \mathcal{H}_{1/2}.$$ ■

Lemma 5.7 (i) *Sei $u \in \mathcal{H}_*^{1/2}$ und sei $\varphi \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ mit $\varphi - c \in H^{1/2}(\mathbb{R})$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Dann gehört die Funktion*

$$u_{[\varphi]} := \begin{cases} u(t) & \textit{falls} \quad \|u(t)\|_H \le \varphi(t) \\ \dfrac{\varphi(t)u(t)}{\|u(t)\|_H} & \textit{falls} \quad \|u(t)\|_H > \varphi(t) \end{cases}$$

zu $\mathcal{H}_*^{1/2}$ und es gilt:

$$\|u_{[\varphi]}\|_{\mathcal{H}_*^{1/2}} \le 2\Big(\|u\|_{\mathcal{H}_*^{1/2}} + |\varphi - c|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \Big). \tag{5.42}$$

(ii) *Sei $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$ mit $u\big|_{(-a,a)} \in H^{1/2}(-a,a;H)$ für jedes $a > 0$, dann ist*

$$\varphi \cdot u \in \mathcal{H}_{1/2} \quad \forall\, \varphi \in C^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}).$$

Beweis. - (i) Sei $u \in \mathcal{H}_*^{1/2}$ und sei $\varphi \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ mit $\varphi - c \in H^{1/2}(\mathbb{R})$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Unmittelbar aus der Definition von $u_{[\varphi]}$ folgt

$$\|u_{[\varphi]}(t)\|_H \le \|u(t)\|_H \quad \text{ffa. } t \in \mathbb{R}. \tag{5.43}$$

Weiter zeigen wir, daß

$$\|u_{[\varphi]}(s) - u_{[\varphi]}(t)\|_H \le 2\|u(s)-u(t)\|_H + |\varphi(s) - \varphi(t)| \quad \text{ffa. } s,t \in \mathbb{R}. \tag{5.44}$$

1) Wie man sofort aus der Definition von $u_{[\varphi]}$ entnimmt, ist (5.44) sicherlich für alle $s,t \in \mathbb{R}$, für welche $\|u(s)\|_H \le \varphi(s)$ und $\|u(t)\|_H \le \varphi(t)$ gilt, erfüllt.

2) Seien $s, t \in \mathbb{R}$, so daß $\|u(s)\|_H > \varphi(s)$, $\|u(t)\|_H > \varphi(t)$. Dann bekommt man unter Benutzung der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
\|u_{[\varphi]}(s) - u_{[\varphi]}(t)\|_H &= \left\| \frac{\varphi(s)u(s)}{\|u(s)\|_H} - \frac{\varphi(t)u(t)}{\|u(t)\|_H} \right\|_H \leq \\
&\leq \|u(s) - u(t)\|_H + \left\| \frac{\varphi(s)u(t)}{\|u(s)\|_H} - \frac{\varphi(s)u(t)}{\|u(t)\|_H} \right\|_H + \\
&\qquad\qquad + \left\| \frac{\varphi(s)u(t)}{\|u(t)\|_H} - \frac{\varphi(t)u(t)}{\|u(t)\|_H} \right\|_H \leq \\
&\leq 2\|u(s) - u(t)\|_H + |\varphi(s) - \varphi(t)|.
\end{aligned}$$

3) Seien $s, t \in \mathbb{R}$, so daß $\|u(s)\|_H \leq \varphi(s)$, $\|u(t)\|_H > \varphi(t)$. Nach Anwendung der Dreiecksungleichung erhält man

$$\begin{aligned}
\|u_{[\varphi]}(s) - u_{[\varphi]}(t)\|_H &\leq \|u(s) - u(t)\|_H + \left\| u(t) - \frac{\varphi(t)u(t)}{\|u(t)\|_H} \right\|_H \leq \\
&\leq \|u(s) - u(t)\|_H + \|u(t)\|_H - \varphi(t).
\end{aligned}$$

Im Fall $\varphi(s) \geq \|u(t)\|_H$ ergibt sich

$$\|u(t)\|_H - \varphi(t) \leq |\varphi(s) - \varphi(t)|.$$

Ist umgekehrt $\varphi(s) < \|u(t)\|_H$, so folgt wegen $\|u(s)\|_H \leq \varphi(s)$ mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_H - \varphi(t) &\leq |\varphi(s) - \varphi(t)| + \|u(t)\|_H - \varphi(s) \leq \\
&\leq |\varphi(s) - \varphi(t)| + \|u(s) - u(t)\|_H,
\end{aligned}$$

womit auch in diesem Fall die Ungleichung (5.44) bewiesen ist.

Mit Hilfe der beiden Ungleichungen (5.43) und (5.44) bestätigt man $u_{[\varphi]} \in \mathcal{H}_*^{1/2}$ und die Abschätzung (5.42).

(ii) Sei $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$ mit $u\big|_{(-a,a)} \in H^{1/2}(-a, a; H)$ für jedes $a > 0$. Ferner sei $\varphi \in C^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$. Wir wählen $a > 0$ so, daß $\varphi \equiv 0$ in $\mathbb{R} \setminus (-a, a)$. Dann haben wir:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\|\varphi(s)u(s) - \varphi(t)u(t)\|_H^2}{(s-t)^2} \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \\
&= 2 \int_{-\infty}^{-a-1} \int_{-a-1}^{a+1} \frac{(\varphi(s))^2 \|u(s)\|_H^2}{(s-t)^2} \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t + 2 \int_{-a-1}^{a+1} \int_{a+1}^{\infty} \frac{(\varphi(t))^2 \|u(t)\|_H^2}{(s-t)^2} \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t + \\
&\quad + \int_{-a-1}^{a+1} \int_{-a-1}^{a+1} \frac{\|\varphi(s)u(s) - \varphi(t)u(t)\|_H^2}{(s-t)^2} \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \leq
\end{aligned}$$

$$\le 4 \max_{t\in\mathbb{R}} |\varphi|^2 \int_{-a}^{a} \|u(t)\|_H^2 \,\mathrm{d}t + \int_{-a-1}^{a+1}\int_{-a-1}^{a+1} \frac{(\varphi(s)-\varphi(t))^2\|u(s)\|_H^2}{(s-t)^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t +$$
$$+ \int_{-a-1}^{a+1}\int_{-a-1}^{a+1} \frac{(\varphi(s))^2\|u(s)-u(t)\|_H^2}{(s-t)^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \le$$
$$\le (4\max_{t\in\mathbb{R}} \varphi^2 + \max_{t\in\mathbb{R}}(\varphi')^2) \int_{-a-1}^{a+1} \|u(t)\|_H^2\,\mathrm{d}t +$$
$$+ \max_{t\in\mathbb{R}} \varphi^2 \int_{-a-1}^{a+1}\int_{-a-1}^{a+1} \frac{\|u(s)-u(t)\|_H^2}{(s-t)^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t < +\infty.$$

Darüber hinaus haben wir

$$\int_{\mathbb{R}} (\varphi(t))^2 \|u(t)\|_H^2\,\mathrm{d}t \le \max_{t\in\mathbb{R}} \varphi^2 \int_{-a}^{a} \|u(t)\|_H^2\,\mathrm{d}t < +\infty.$$

Aus den obigen Abschätzungen schließt man $\varphi\cdot u \in H^{1/2}(\mathbb{R};H)$, was nach (5.3) äquivalent ist zu $\varphi \cdot u \in \mathcal{H}_{1/2}$. ■

Lemma 5.8 1. *Sei* (u_m) *eine in* $\mathcal{H}_*^{1/2}$ *beschränkte Folge. Außerdem existiere ein* $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$*, so daß*

$$u_m\big|_{(-a,a)} \to u\big|_{(-a,a)} \quad \textit{in} \quad L^2(-a,a;H) \quad \textit{für} \quad m \to +\infty \quad \forall\, a>0.$$

Dann gilt:

$$u_m \rightharpoonup u \quad \textit{in} \quad \mathcal{H}_*^{1/2} \quad \textit{für} \quad m \to +\infty.$$

2. *Sei* $u \in \mathcal{H}_*^{1/2} \cap L^\infty(\mathbb{R};H)$*. Dann existiert eine Folge* $(u_m) \subset \mathcal{H}_{1/2}$:

$$\text{(5.45)} \qquad \begin{cases} \operatorname{supp}(u_m) \subset\subset \mathbb{R}; \quad \|u_m(t)\|_H \le \|u(t)\|_H \quad \text{ffa. } t \in \mathbb{R}\ (m\in\mathbb{N}), \\ u_m \rightharpoonup u \quad \textit{in} \quad \mathcal{H}_*^{1/2} \quad \textit{für} \quad m \to +\infty. \end{cases}$$

3. *Sei* $u \in \mathcal{H}_*^{1/2}$*. Dann existiert eine Folge* $(u_m) \subset \mathcal{H}_*^{1/2} \cap L^\infty(\mathbb{R};H)$:

$$\text{(5.46)} \qquad \begin{cases} \|u_m(t)\|_H \le \|u(t)\|_H \quad \text{ffa. } t \in \mathbb{R}\ (m\in\mathbb{N}), \\ u_m \rightharpoonup u \quad \textit{in} \quad \mathcal{H}_*^{1/2} \quad \textit{für} \quad m \to +\infty. \end{cases}$$

Beweis. - 1. Da $\mathcal{H}_*^{1/2}$ reflexiv ist, existiert eine Teilfolge (u_{m_j}) von (u_m), die schwach gegen eine Funktion v in $\mathcal{H}_*^{1/2}$ konvergiert. Sei $a>0$ beliebig, aber fixiert. Sei $g \in L^2(-a,a;H)$

beliebig gewählt. Unter Beachtung der Abschätzung (5.41) erhält man für jedes $\varphi \in \mathcal{H}_*^{1/2}$

$$\left\| \int_{-a}^{a} (g(t), \varphi(t))_H \,\mathrm{d}t \right\| \;\le\; \sqrt{c(a)} \|g\|_{L^2(-a,a;H)} \|\varphi\|_{\mathcal{H}_*^{1/2}}.$$

Somit ist $\varphi \mapsto \displaystyle\int_{-a}^{a} (g(t), \varphi(t))_H \,\mathrm{d}t$ ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{H}_*^{1/2}$. Aus den Voraussetzungen folgert man

$$\int_{-a}^{a} (g(t), u(t))_H \,\mathrm{d}t \;=\; \lim_{j\to\infty} \int_{-a}^{a} (g(t), u_{m_j}(t))_H \,\mathrm{d}t \;=\; \int_{-a}^{a} (g(t), v(t))_H \,\mathrm{d}t,$$

also

$$\int_{-a}^{a} (g(t), u(t) - v(t))_H \,\mathrm{d}t \;=\; 0 \quad \forall\, g \in L^2(-a,a;H).$$

Aufgrund der Beliebigkeit von $a > 0$ erhält man schließlich $v(t) = u(t)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$. Da der Grenzwert der Teilfolge eindeutig bestimmt ist, folgt die Behauptung.

2. Sei $u \in \mathcal{H}_*^{1/2} \cap L^\infty(\mathbb{R};H)$. Sei $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ mit $\varphi \equiv 0$ auf $\mathbb{R} \setminus [-2,2]$ und $\varphi \equiv 1$ auf $[-1,1]$. Wir setzen

$$\begin{cases} \varphi_m(t) := \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R};H)}\, \varphi(t/m) \quad (t \in \mathbb{R}), \\ u_m := u_{[\varphi_m]} \quad (m \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Aus der Definition von $u_{[\varphi_m]}$ folgt $\operatorname{supp}(u_m) \subset \operatorname{supp}(\varphi_m) \subset [-2m, 2m]$. Mit Hilfe der Transformationsformel findet man leicht

$$|\varphi_m|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} = \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R};H)} |\varphi|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \quad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

und zusammen mit Lemma 5.7, (i) folgt, daß (u_m) eine in $\mathcal{H}_*^{1/2}$ beschränkte Folge ist.

Da außerdem gilt: $u_m(t) = u(t)$ für fast alle $t \in (-m,m)$ $(m \in \mathbb{N})$ konvergiert u_m gegen u fast überall in $\mathbb{R}$. Unter Benutzung des Konvergenzsatzes von Lebesgue, schließt man, daß für jedes $a > 0$:

$$u_m|_{(-a,a)} \to u|_{(-a,a)} \quad \text{in} \quad L^2(-a,a,H) \quad \text{für} \quad m \to +\infty.$$

Nach 1. konvergiert (u_m) schwach gegen u in $\mathcal{H}_*^{1/2}$.

3. Sei $u \in \mathcal{H}_*^{1/2}$. Wir setzen

$$u_m := u_{[\varphi_m]}, \quad (\varphi_m \equiv m;\ m \in \mathbb{N}).$$

Wie man leicht nachprüft, gilt:

$$\|u_m(t)\|_H \;\leq\; \max\{\|u(t)\|_H, m\} \quad \text{ffa. } t \in \mathbb{R},\; \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

und zusammen mit Lemma 5.7, (i) bestätigt man

$$|u_m|_{1/2} \;\leq\; 2|u|_{1/2} \quad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Somit ist (u_m) eine in $\mathcal{H}_*^{1/2}$ beschränkte Folge. Außerdem verifiziert man unter Benutzung des Konvergenzsatzes von Lebesgue, daß für jedes $a > 0$:

$$u_m\big|_{(-a,a)} \to u\big|_{(-a,a)} \quad \text{in} \quad L^2(-a,a,H) \quad \text{für} \quad m \to +\infty,$$

und nach 1. konvergiert (u_m) schwach gegen u in $\mathcal{H}_*^{1/2}$. ■

Wir sind nun in der Lage die folgende Dichtheitsaussage zu beweisen

Satz 5.6 *Der Raum $C_c^\infty(\mathbb{R}; H)$ ist dicht in $\mathcal{H}_*^{1/2}$.*

Beweis. - Sei f stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{H}_*^{1/2}$ mit

$$\langle f, v\rangle \;=\; 0 \quad \forall\, v \in C_c^\infty(\mathbb{R}; H). \tag{5.47}$$

(i) Sei $u \in \mathcal{H}_{1/2}$ mit $\mathrm{supp}(u) \subset\subset \mathbb{R}$. Seien $\omega_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\omega_\varepsilon = 0$ in $\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$ die üblichen Mittelfunktionen. Wir definieren

$$u_\varepsilon(t) := (u * \omega_\varepsilon)(t) \;=\; \int_{\mathbb{R}} \omega(\tau) u(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Bekanntlich ist $u_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}; H)$, und es gilt:

$$u_\varepsilon \to u \quad \text{in} \quad L^2(\mathbb{R}; H) \quad \text{für} \quad \varepsilon \to 0.$$

Mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung und dem Satz von Fubini zeigt man

$$|u_\varepsilon|_{H^{1/2}(\mathbb{R};H)} \;\leq\; |u|_{H^{1/2}(\mathbb{R};H)} \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Nach Lemma 5.8, 1. folgt nun, daß u_ε schwach gegen u in $\mathcal{H}_*^{1/2}$ konvergiert, und zusammen mit (5.47) bekommt man

$$\langle f, u\rangle \;=\; \lim_{\varepsilon \to 0^+} \langle f, u_\varepsilon\rangle \;=\; 0. \tag{5.48}$$

(ii) Sei $u \in \mathcal{H}_*^{1/2} \cap L^\infty(\mathbb{R};H)$. Nach Lemma 5.8, 2. existiert eine Folge $(u_m) \in \mathcal{H}_{1/2}$ mit $\operatorname{supp}(u_m) \subset\subset \mathbb{R}\,(m \in \mathbb{N})$, so daß

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{in} \quad \mathcal{H}_*^{1/2} \quad \text{für} \quad m \to +\infty.$$

Benutzt man (5.48), so ergibt sich

$$\langle f, u\rangle \;=\; \lim_{m\to\infty} \langle f, u_m\rangle \;=\; 0. \tag{5.49}$$

(iii) Sei $u \in \mathcal{H}_*^{1/2}$. Nach Lemma 5.8, 3. findet man eine Folge $(u_m) \in \mathcal{H}_*^{1/2} \cap L^\infty(\mathbb{R};H)$, so daß

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{in} \quad \mathcal{H}_*^{1/2} \quad \text{für} \quad m \to +\infty,$$

und (5.49) impliziert schließlich

$$\langle f, u\rangle \;=\; \lim_{m\to\infty} \langle f, u_m\rangle \;=\; 0.$$

Dies bedeutet $f = 0$, womit die Dichtheit der Menge $C_c^\infty(\mathbb{R};H)$ in $\mathcal{H}_*^{1/2}$ bewiesen ist. ∎

Der Operator der Zeitableitung auf der reellen Achse

Sei $u \in \mathcal{H}_{1/2}$. Dann definieren wir $\mathcal{B}(u) \in (\mathcal{H}_{1/2})'$ gemäß

$$\langle \mathcal{B}(u), v\rangle := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{i}\, t(\hat{u}(t), \hat{v}(t))_H \,\mathrm{d}t \quad (v \in \mathcal{H}_{1/2}).$$

Man beobachtet, daß

$$|\langle \mathcal{B}(u), v\rangle| \;\le\; \|u\|_{\mathcal{H}_*^{1/2}} \|v\|_{\mathcal{H}_*^{1/2}} \quad \forall\, v \in \mathcal{H}_{1/2}, \tag{5.50}$$

und da $\mathcal{H}_{1/2}$ eine dichte Teilmenge von $\mathcal{H}_*^{1/2}$ ist, kann man $\mathcal{B}(u)$ eindeutig zu einem stetigen linearen Funktional auf $\mathcal{H}_*^{1/2}$ fortsetzen, welches wir ebenfalls mit $\mathcal{B}(u)$ bezeichnen. Aus (5.50) folgt sofort

$$\|\mathcal{B}(u)\|_{(\mathcal{H}_*^{1/2})'} \;\le\; \|u\|_{\mathcal{H}_*^{1/2}} \quad \forall\, u \in \mathcal{H}_{1/2}.$$

Es existiert also genau ein linearer stetiger Operator

$$\mathcal{B} : \mathcal{H}_*^{1/2} \to (\mathcal{H}_*^{1/2})'$$

mit der Eigenschaft:

$$(5.51) \qquad \langle \mathcal{B}(u), v\rangle = -\overline{\langle \mathcal{B}(v), u\rangle} \;=\; \int_{\mathbb{R}} \mathrm{i}\, t(\hat{u}(t), \hat{v}(t))_H \,\mathrm{d}t \quad \forall\, u, v \in \mathcal{H}_{1/2}.$$

Der folgende Satz zeigt, daß der Operator $\mathcal{B}$ eine Verallgemeinerung des Operators $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}$ darstellt.

Satz 5.7 (Eigenschaften des Operators $\mathcal{B}$)
1) *Sei* $u \in \mathcal{H}_*^{1/2}$. *Dann gilt für beliebige* $v \in \mathcal{H}_1$ *mit* $\operatorname{supp}(v) \subset\subset \mathbb{R}$:

$$\langle \mathcal{B}(u), v\rangle \;=\; -\int_{\mathbb{R}} (u(t), v'(t))_H \,\mathrm{d}t.$$

2) *Für alle* $u \in \mathcal{H}_*^{1/2}$ *mit* $u' \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$ *gilt*:

$$\mathcal{B}(u) \;=\; u'.$$

3) *Sei* $t_0 \in \mathbb{R}$. *Seien* $u, v \in \mathcal{H}_*^{1/2}$ *mit* $\operatorname{supp}(u) \subset [t_0, +\infty)$ *und* $\operatorname{supp}(u) \subset (-\infty, t_0]$. *Dann*:

$$\langle \mathcal{B}(u), v\rangle \;=\; 0.$$

4) *Es gilt*:

$$\text{(i)} \qquad \ker(\mathcal{B}) \;=\; \{u \in \mathcal{H}_*^{1/2} \,|\, u \equiv \text{const}\},$$

$$\text{(ii)} \qquad \operatorname{im}(\mathcal{B}) \;=\; \{F \in (\mathcal{H}_*^{1/2})' \,|\, \langle F, v\rangle = 0 \quad \forall\, v \in \ker(\mathcal{B})\}.$$

Beweis. - 1° Sei $u \in \mathcal{H}_{1/2}$ und $v \in \mathcal{H}_1$. Dann folgt unter Verwendung des Satzes von Plancherel.

$$\langle \mathcal{B}(u), v\rangle \;=\; -\int_{\mathbb{R}} (u(t), v'(t))_H \,\mathrm{d}t.$$

Seien $u \in \mathcal{H}_*^{1/2}$ und $v \in \mathcal{H}_1$ mit $\operatorname{supp}(v) \subset\subset \mathbb{R}$. Nach Satz 5.6 existiert eine Folge $(u_m) \in \mathcal{H}_{1/2}$ die in $\mathcal{H}_*^{1/2}$ gegen u konvergiert. Sei $a > 0$, so daß $v \equiv 0$ auf $\mathbb{R} \setminus (-a, a)$. Beachtet man (5.41), so folgt:

$$u_m\big|_{(-a,a)} \to u\big|_{(-a,a)} \quad \text{in} \quad L^2((-a,a)) \quad \text{für} \quad m \to +\infty.$$

Hieraus schließt man

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{B}(u), v\rangle &= \lim_{m\to+\infty}\langle \mathcal{B}(u_m), v\rangle = \\ &= -\lim_{m\to\infty}\int_{-a}^{a}(u_m(t), v'(t))_H \,\mathrm{d}t = -\int_{\mathbb{R}}(u(t), v'(t))_H \,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

was die erste Eigenschaft beweist.

Nun sei $u \in \mathcal{H}_*^{1/2}$ mit $u' \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$. Sei $v \in \mathcal{H}_1$ mit $\operatorname{supp}(v) \subset\subset \mathbb{R}$. Unter Benutzung von 1) und partieller Integration erhält man

$$\langle \mathcal{B}(u), v\rangle = -\int_{\mathbb{R}}(u(t), v'(t))_H \,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}}(u'(t), v(t))_H \,\mathrm{d}t.$$

Dies bedeutet, daß u' eine Darstellung des Funktionals $\mathcal{B}(u)$ ist.

2° (1) *Beweis von* 3) *für* $u, v \in \mathcal{H}_{1/2}$: Seien $u, v \in \mathcal{H}_{1/2}$ mit $\operatorname{supp}(u) \subset [t_0, +\infty)$ und $\operatorname{supp}(v) \subset (-\infty, t_0]$. Sei $\lambda > 0$ beliebig gewählt. Es bezeichne v_λ das Steklov-Mittel von v. Es ist leicht einzusehen, daß $v_\lambda \in \mathcal{H}_1$ und $v_\lambda(t) = 0$ für alle $t > t_0$. Wegen 1) haben wir

$$\langle \mathcal{B}(u), v_\lambda\rangle = -\int_{\mathbb{R}}(u(t), v_\lambda'(t))\,\mathrm{d}t = 0.$$

Da nach Lemma 5.3 gilt:

$$v_\lambda \to v \quad \text{in} \quad \mathcal{H}_{1/2} \quad \text{für} \quad \lambda \to 0,$$

folgt die Aussage aus der Stetigkeit von $\mathcal{B}(u)$ auf $\mathcal{H}_*^{1/2}$.

(2) *Beweis von* 3) *für* $u, v \in \mathcal{H}_*^{1/2} \cap L^\infty(\mathbb{R}; H)$: Nach Lemma 5.8, 2. existieren Folgen $(u_m), (v_m) \subset \mathcal{H}_{1/2}$, so daß

$$\begin{cases} \|u_m(t)\|_H \le \|u(t)\|_H,\ \|v_m(t)\|_H \le \|v(t)\|_H \quad \text{ffa. } t \in \mathbb{R} \quad (m \in \mathbb{N}); \\ u_m \rightharpoonup u, \quad v_m \rightharpoonup v \text{ in } \quad \mathcal{H}_*^{1/2} \quad \text{für} \quad m \to +\infty. \end{cases}$$

Aus $\operatorname{supp}(u) \subset [t_0, +\infty)$ (bzw. $\operatorname{supp}(v) \subset (-\infty, t_0]$) folgt $\operatorname{supp}(u_m) \subset [t_0, +\infty)$ (bzw. $\operatorname{supp}(v_m) \subset (-\infty, t_0]$) für alle $m \in \mathbb{N}$. Dies liefert nach (1)

$$\langle \mathcal{B}(u_m), v_l\rangle = 0 \quad \forall\, m, l \in \mathbb{N}.$$

Nun folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{m\to\infty}\lim_{l\to\infty}\langle \mathcal{B}(u_m), v_l\rangle = \lim_{m\to\infty}\langle \mathcal{B}(u_m), v\rangle = \\ &= -\lim_{m\to\infty}\overline{\langle \mathcal{B}(v), u_m\rangle} = \langle \mathcal{B}(u), v\rangle. \end{aligned}$$

(3) *Beweis von* 3) *für* $u, v \in \mathcal{H}_*^{1/2}$: Nach Lemma 5.8, 3. existieren Folgen $(u_m), (v_m) \subset \mathcal{H}_*^{1/2} \cap L^\infty(\mathbb{R}; H)$, so daß

$$\begin{cases} \|u_m(t)\|_H \le \|u(t)\|_H, \ \|v_m(t)\|_H \le \|v(t)\|_H \quad \text{ffa. } t \in \mathbb{R} \quad (m \in \mathbb{N}); \\ u_m \rightharpoonup u, \quad v_m \rightharpoonup v \text{ in } \quad \mathcal{H}_*^{1/2} \quad \text{für} \quad m \to +\infty. \end{cases}$$

Benutzt das in (2) gewonnene Resultat, so folgt

$$\langle \mathcal{B}(u_m), v_l \rangle = 0 \quad \forall\, m, l \in \mathbb{N}.$$

Die Behauptung folgt nun analog wie in (2) nach Ausführung der Grenzübergänge $l \to +\infty$ und $m \to +\infty$.

3° $\ker(\mathcal{B}) = \mathcal{N} := \{u \in \mathcal{H}_*^{1/2} \mid u = \text{const}\}$: Sei $u \in \mathcal{N}$. Unter Verwendung von 1) bekommt man:

$$\langle \mathcal{B}(u), v \rangle = -\int_{\mathbb{R}} (u(t), v'(t))_H \, \mathrm{d}t = 0 \quad \forall\, v \in \mathcal{H}_1 \quad \text{mit} \quad \operatorname{supp}(v) \subset\subset \mathbb{R},$$

und wegen der Dichtheit des Raumes $C_c^1(\mathbb{R}; H)$ in $\mathcal{H}_*^{1/2}$ folgt $\mathcal{B}(u) = 0$.

Sei umgekehrt $u \in \mathcal{H}_*^{1/2}$ mit $\mathcal{B}(u) = 0$. Auch hier bekommt man mit Hilfe der Eigenschaft 1):

$$\int_{\mathbb{R}} (u(t), v'(t))_H \, \mathrm{d}t = 0 \quad \forall\, v \in \mathcal{H}_1 \quad \text{mit} \quad \operatorname{supp}(v) \subset\subset \mathbb{R}.$$

Dies impliziert $u = \text{const}$ fast überall in $\mathbb{R}$, also $u \in \mathcal{N}$.

4° $\operatorname{im}(\mathcal{B}) = \mathcal{N}^\circ := \{f \in (\mathcal{H}_*^{1/2})' \mid \langle f, v \rangle = 0 \quad \forall\, v \in \ker(\mathcal{B})\}$: Zunächst beweisen wir, daß $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{1/2})$ in $\mathcal{N}^\circ$ dicht liegt. Sei $f \in \mathcal{N}^\circ$, so daß

$$(f, g)_{(\mathcal{H}_*^{1/2})'} = 0 \quad \forall\, g \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{1/2}).$$

Unter Verwendung des Rieszschen Darstellungsoperators $I : (\mathcal{H}_*^{1/2})' \to \mathcal{H}_*^{1/2}$ erhält man für jedes $v \in \mathcal{H}_{1/2}$

$$0 = (f, \mathcal{B}(v))_{(\mathcal{H}_*^{1/2})'} = \langle \mathcal{B}(v), I(f) \rangle = -\overline{\langle \mathcal{B}(I(f)), v \rangle}.$$

Da $\mathcal{H}_{1/2}$ in $\mathcal{H}_*^{1/2}$ dicht ist, haben wir $I(f) \in \ker(\mathcal{B})$. Dann ist $I(f)$ eine konstante Funktion. Hieraus schließt man

$$\|f\|^2_{(\mathcal{H}_*^{1/2})'} = \langle f, I(f) \rangle = 0,$$

also $f = 0$. Dies zeigt die behauptete Dichtheit. Insbesondere ist $\operatorname{im}(\mathcal{B})$ in $\mathcal{N}^\circ$ dicht.

Nun definieren wir $\mathcal{B}_{\mathcal{N}} := \mathcal{H}_*^{1/2}/\mathcal{N} \to \mathcal{N}^\circ$ durch

$$\langle \mathcal{B}_{\mathcal{N}}([u]), v\rangle := \langle \mathcal{B}(u), v\rangle \quad ([u] \in \mathcal{H}_*^{1/2}/\mathcal{N}, u \in [u], v \in \mathcal{H}_*^{1/2}).$$

Die Beschränktheit von $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}$ folgert man unmittelbar aus der Beschränktheit von $\mathcal{B}$. Außerdem ist wegen

$$\operatorname{im}(\mathcal{B}_{\mathcal{N}}) = \operatorname{im}(\mathcal{B})$$

$\operatorname{im}(\mathcal{B}_{\mathcal{N}})$ in $\mathcal{N}^\circ$ dicht.

Als nächstes beweisen wir die folgende Abschätzung:

$$(5.52) \qquad \begin{cases} \forall\, [u] \in \mathcal{H}_*^{1/2}/\mathcal{N}, u \in [u] : \\ \|[u]\|_{\mathcal{H}_*^{1/2}/\mathcal{N}} \le \left(\dfrac{2}{\sigma_{1/2}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\|u(s) - u(t)\|_H^2}{(s-t)^2} \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t \right)^{1/2}. \end{cases}$$

Sei $[u] \in \mathcal{H}_*^{1/2}/\mathcal{N}, u \in [u]$. Dann erhält man unter Benutzung der Hölderschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} \|[u]\|^2_{\mathcal{H}_*^{1/2}/\mathcal{N}} &\le \int_{-1}^0 \left\| u(t) - \int_{-1}^0 u(s)\,\mathrm{d}s \right\|_H^2 \mathrm{d}t \,+ \\ &\qquad + \frac{1}{\sigma_{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\|u(s) - u(t)\|_H^2}{(s-t)^2} \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t \le \\ &\le \frac{2}{\sigma_{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\|u(s) - u(t)\|_H^2}{(s-t)^2} \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

was die Gültigkeit von (5.52) bestätigt. Aus (5.52) erhält man außerdem mit Hilfe des Satzes von Plancherel

$$(5.53) \qquad \|[u]\|^2_{\mathcal{H}_*^{1/2}/\mathcal{N}} \le 2 \int_{\mathbb{R}} |\tau| \|\hat{u}(\tau)\|_H^2 \,\mathrm{d}\tau \quad \forall\, u \in \mathcal{H}_{1/2}.$$

Sei $u \in \mathcal{H}_{1/2}$. Dann schließt man unter Benutzung von (5.53)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\tau| \|\hat{u}(\tau)\|_H^2 \,\mathrm{d}\tau &= -\langle \mathcal{B}(u), \mathfrak{R}u\rangle = - \inf_{\xi \in \mathcal{N}} \langle \mathcal{B}(u), \mathfrak{R}u - \xi\rangle \le {}^{7)} \\ &\le \|\mathcal{B}(u)\|_{(\mathcal{H}_*^{1/2})'} \|[\mathfrak{R}u]\|_{\mathcal{H}_*^{1/2}/\mathcal{N}} \le \\ &\le \sqrt{2}\, \|\mathcal{B}(u)\|_{(\mathcal{H}_*^{1/2})'} \left(\int_{\mathbb{R}} |\tau| \|\hat{u}(\tau)\|_H^2 \,\mathrm{d}\tau \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Dies impliziert zusammen mit (5.53)

$$\|[u]\|_{\mathcal{H}_*^{1/2}/\mathcal{N}} \le 2\|\mathcal{B}(u)\|_{(\mathcal{H}_*^{1/2})'}. \tag{5.54}$$

Sei nun $f \in \mathcal{N}^\circ$ beliebig. Da $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{1/2})$ in $\mathcal{N}^\circ$ dicht ist, gibt es eine Folge $(u_m) \subset \mathcal{H}_{1/2}$, so daß

$$\mathcal{B}(u_m) \to f \quad \text{in} \quad (\mathcal{H}_*^{1/2})' \quad \text{für} \quad m \to +\infty.$$

Benutzt man (5.54), so ist klar, daß $([u_m])$ in $\mathcal{H}_*^{1/2}/\mathcal{N}$ eine Cauchy-Folge ist, und somit gegen ein $[u] \in \mathcal{H}_*^{1/2}/\mathcal{N}$ konvergiert. Aus der Stetigkeit von $\mathcal{B}_\mathcal{N}$ folgt $f = \mathcal{B}_\mathcal{N}([u])$, was schließlich $f \in \mathrm{im}(\mathcal{B}_\mathcal{N}) = \mathrm{im}(\mathcal{B})$ impliziert. ■

Fortsetzungen auf die gesamte reelle Achse

Sei $u \in H_a^{1/2}(a,b;H)$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. Dann definieren wir die Fortsetzung

$$(\mathcal{S}_a^+ u)(t) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t \in \mathbb{R} \setminus (a, 2b-a) \\ u(t) & \text{für} \quad t \in (a,b) \\ u(2b-t) & \text{für} \quad t \in (b, 2b-a). \end{cases}$$

Für $v \in H_b^{1/2}(a,b;H)$ setzen wir

$$(\mathcal{S}_b^- v)(t) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t \in \mathbb{R} \setminus (2a-b, b) \\ v(t) & \text{für} \quad t \in (a,b) \\ v(2a-t) & \text{für} \quad t \in (2a-b, a). \end{cases}$$

Lemma 5.9 *Seien $-\infty < a < b < +\infty$. Es gilt:*

$$\mathcal{S}_a^+ u \in \mathcal{H}_{1/2} \quad \forall\, u \in H_a^{1/2}(a,b;H),$$
$$\mathcal{S}_b^- v \in \mathcal{H}_{1/2} \quad \forall\, v \in H_b^{1/2}(a,b;H).$$

Außerdem sind die Fortsetzungsoperatoren

[7] Hier haben wir die Eigenschaft $\langle \mathcal{B}(u), v\rangle = -\overline{\langle \mathcal{B}(v), u\rangle}$ benutzt. Für jedes $\xi \in \mathcal{N}$ und $u \in \mathcal{H}_*^{1/2}$ gilt somit: $\langle \mathcal{B}(u), \xi\rangle = -\overline{\langle \mathcal{B}(\xi), u\rangle} = 0$.

$$\mathcal{S}_a^+ : H_a^{1/2}(a,b;H) \to \mathcal{H}_{1/2}, \quad \mathcal{S}_b^- : H_b^{1/2}(a,b;H) \to \mathcal{H}_{1/2}$$

linear und stetig.

Beweis. - Wir beweisen die Aussagen des Lemmas für die Fortsetzung $\mathcal{S}_a^+$. Die Aussagen für den Operator $\mathcal{S}_b^-$ beweist man völlig analog. Sei $u \in H_a^{1/2}(a,b;H)$. Dann berechnet man mit Hilfe der Transformationsformel:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{\|\mathcal{S}_a^+u(s) - \mathcal{S}_a^+u(t)\|_H^2}{(s-t)^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \;= \\
&= \;2\int_{-\infty}^{b}\int_{-\infty}^{b} \frac{\|\mathcal{S}_a^+u(s) - \mathcal{S}_a^+u(t)\|_H^2}{(s-t)^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t + 2\int_{-\infty}^{b}\int_{b}^{+\infty} \frac{\|\mathcal{S}_a^+u(s) - \mathcal{S}_a^+u(t)\|_H^2}{(s-t)^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \;I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Für das erste Integral berechnen wir

$$\begin{aligned}
I_1 \;&=\; 4\int_{-\infty}^{a}\int_{a}^{b} \frac{\|u(t)\|_H^2}{(s-t)^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \;+\; 2\int_{a}^{b}\int_{a}^{b} \frac{\|u(s)-u(t)\|_H^2}{(s-t)^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \;= \\
&=\; 4\int_{a}^{b} \frac{\|u(t)\|_H^2}{t-a}\,\mathrm{d}t \;+\; 2\int_{a}^{b}\int_{a}^{b} \frac{\|u(s)-u(t)\|_H^2}{(s-t)^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \;\le \\
&\le\; 4\sigma_{1/2}\|u\|^2_{H_a^{1/2}(a,b;H)},
\end{aligned}$$

und für das zweite Integral bekommt man wegen $\mathcal{S}_a^+u(2b-t) = \mathcal{S}_a^+u(t)$ $(t \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
I_2 &= 2\int_{-\infty}^{b}\int_{-\infty}^{b} \frac{\|\mathcal{S}_a^+u(s) - \mathcal{S}_a^+u(t)\|_H^2}{(2b-s-t)^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \;= \\
&\le\; 2\int_{-\infty}^{b}\int_{-\infty}^{b} \frac{\|\mathcal{S}_a^+u(s) - \mathcal{S}_a^+u(t)\|_H^2}{(s-t)^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \;=\; I_1 \;\le\; 4\sigma_{1/2}\|u\|^2_{H_a^{1/2}(a,b;H)}.
\end{aligned}$$

Außerdem findet man

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{S}_a^+u\|^2_{\mathcal{H}} \;&=\; 2\int_a^b \|u(t)\|_H^2\,\mathrm{d}t \;\le\; 2(b-a)\int_a^b \frac{\|u(t)\|_H^2}{t-a}\,\mathrm{d}t \;\le \\
&\le\; 2(b-a)\sigma_{1/2}\|u\|^2_{H_a^{1/2}(a,b;H)}.
\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von (5.3) bekommt man schließlich

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{S}_a^+u\|^2_{\mathcal{H}_{1/2}} \;&\le\; \|\mathcal{S}_a^+u\|^2_{\mathcal{H}} \;+\; \frac{1}{\sigma_{1/2}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{\|\mathcal{S}_a^+u(s) - \mathcal{S}_a^+u(t)\|_H^2}{(s-t)^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \;\le \\
&\le\; (2(b-a)\sigma_{1/2} + 8)\|u\|^2_{H_a^{1/2}(a,b;H)}.
\end{aligned}$$

■

Der Operator der Zeitableitung auf dem Intervall $(0,T)$

In den nachfolgenden Betrachtungen werden wir den Operator der Zeitableitung auf dem Intervall $(0,T)$ als Bilinearform auf geeigneten Räumen definieren. Hierbei werden wir die im letzten Abschnitt dargelegten Resultate verwenden. Zunächst definieren wir

$$\mathcal{B}_0 := (\mathcal{S}_T^-)^* \mathcal{B}\, \mathcal{S}_0^+ : H_0^{1/2}(0,T;H) \to (H_T^{1/2}(0,T;H))'.$$

Aus der Stetigkeit der Fortsetzungsoperatoren $\mathcal{S}_0^+$ und $\mathcal{S}_T^-$ folgt

$$\mathcal{B}_0 \in \mathcal{L}(H_0^{1/2}(0,T;H), (H_T^{1/2}(0,T;H))').$$

Satz 5.8 (Eigenschaften des Operators $\mathcal{B}_0$)

1) *Sei $u \in H_0^{1/2}(0,T;H)$. Dann gilt für beliebige $v \in H_T^{1/2}(0,T;H)$ mit $v' \in L^2(0,T;H)$:*

$$\langle \mathcal{B}_0(u), v\rangle \;=\; -\int_0^T (u(t), v'(t))_H \,\mathrm{d}t.$$

2) *Für alle $u \in H_0^{1/2}(0,T;H)$ mit $u' \in L^2(0,T;H)$ gilt:*

$$\mathcal{B}_0(u) \;=\; u' \textit{ fast überall in } (0,T).$$

3) *Der Operator $\mathcal{B}_0$ ist bijektiv.*

Beweis. - 1° Sei $v \in H_T^{1/2}(0,T;H)$ mit $v' \in L^2(0,T;H)$. Dann ist $\mathcal{S}_T^- v \in \mathcal{H}_1$. Mit Hilfe von Satz 5.7, 1) bekommt man

$$\langle \mathcal{B}_0(u), v\rangle \;=\; \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{S}_0^+ u)(t), (\mathcal{S}_T^- v)'(t))_H \,\mathrm{d}t \;=\; -\int_0^T (u(t), v'(t))_H \,\mathrm{d}t.$$

Analog beweist man die Aussage 2) unter Verwendung von Satz 5.7.

2° *Der Operator $\mathcal{B}_0$ ist injektiv*: In der Tat folgt mit Hilfe der Aussage 1) aus $\mathcal{B}_0(u) = 0$

$$\int_0^T (u(t), v'(t))_H \,\mathrm{d}t = 0 \quad \forall\, v \in H_T^{1/2}(0,T;H) \quad \text{mit} \quad v' \in L^2(0,T;H),$$

also ist u fast überall in $(0,T)$ konstant. Dies liefert $u \equiv 0$.

3° *Der Operator $\mathcal{B}_0$ ist surjektiv*: Wir definieren

$$\mathcal{N} := \{u \in \mathcal{H}_*^{1/2} \,|\, u = \text{const}\}$$
$$\mathcal{H}_*^{1/2}(-\infty, T) := \{u \in \mathcal{H}_*^{1/2} \,|\, u = 0 \ \text{ f.ü. in } \ (T, +\infty)\}.$$

Sei $f \in (H_T^{1/2}(0, T; H))'$ beliebig, aber fixiert. Wir setzen

$$\langle F, v + w\rangle := \langle f, v\big|_{(0,T)}\rangle \quad (v \in \mathcal{H}_*^{1/2}(-\infty, T);\ w \in \mathcal{N}).$$ [8)]

Dann bestätigt man leicht

$$\begin{cases} |\langle F, v + w\rangle| \ \le \ \|f\|_{(H_T^{1/2}(0,T;H))'} \|v + w\|_{\mathcal{H}_*^{1/2}} \\ \forall\, v \in \mathcal{H}_*^{1/2}(-\infty, T),\ \forall\, w \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

Unter Verwendung des Satzes von Hahn und Banach läßt sich nun F zu einem Funktional $\tilde{F} \in (\mathcal{H}_*^{1/2})'$ fortsetzen. Unmittelbar aus der Definition von F folgt $\langle \tilde{F}, w\rangle = 0$ für alle $w \in \mathcal{N}$. Nach Satz 5.7, 4) gibt es dann ein $\tilde{u} \in \mathcal{H}_*^{1/2}$ mit

$$\mathcal{B}(\tilde{u}) = \tilde{F}.$$

Sei $v \in \mathcal{H}_1$ mit $v = 0$ fast überall in $(0, +\infty)$. Insbesondere gilt dann $v \in \mathcal{H}_*^{1/2}(-\infty, T)$. Aus der Definition von $\tilde{F}$ folgt:

$$\int_{\mathbb{R}} (\tilde{u}(t), v'(t))_H \, \mathrm{d}t \ = \ \langle \mathcal{B}(\tilde{u}), v\rangle \ = \ \langle F, v\rangle \ = \ 0.$$

Hieraus schließt man,

$$\exists \xi \in H: \quad \tilde{u} = \xi \quad \text{f.ü. in } \ (-\infty, 0).$$

Wegen $\mathcal{B}(\tilde{u} - \xi) = \tilde{F}$, können wir $\xi = 0$ annehmen. Somit ist

$$u := \tilde{u}\big|_{(0,T)} \in H_0^{1/2}(0, T; H),$$

und mit Hilfe von Satz 5.7, 1) verifiziert man, daß für beliebige $v \in H_T^{1/2}(0, T; H)$ mit $v' \in L^2(0, T; H)$:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B}_0(u), v\rangle \ &= \ -\int_0^T (u(t), v'(t))_H \, \mathrm{d}t = \\ &= \ \langle \mathcal{B}(\tilde{u}), \mathcal{S}_T^- v\rangle \ = \ \langle \tilde{F}, \mathcal{S}_T^- v\rangle \ = \ \langle f, v\rangle. \end{aligned}$$

[8)] Man beachte, daß für jedes $v \in \mathcal{H}_*^{1/2}(-\infty, T)$ gilt: $v\big|_{(0,T)} \in H_T^{1/2}(0, T; H)$.

Da die Menge aller Funktionen $v \in H_T^{1/2}(0,T;H)$ mit $v' \in L^2(0,T;H)$ eine dichte Teilmenge von $H_T^{1/2}(0,T;H)$ ist, ergibt sich

$$\mathcal{B}_0(u) \;=\; f,$$

womit auch die Surjektivität von $\mathcal{B}_0$ bewiesen ist. ∎

Zerlegung des Raumes $\mathcal{H}_*^{1/2}$

Wir definieren

$$\mathcal{H}_+^{1/2} := \Big\{ u \in \mathcal{H}_*^{1/2} \;\Big|\; u = 0 \;\text{ f.ü. in }\; (-\infty, 0) \Big\},$$
$$\mathcal{H}_-^{1/2} := \Big\{ u \in \mathcal{H}_*^{1/2} \;\Big|\; u = 0 \;\text{ f.ü. in }\; (0, +\infty) \Big\}.$$

Satz 5.9 1. *$\mathcal{H}_+^{1/2}$ und $\mathcal{H}_-^{1/2}$ sind abgeschlossene Teilräume von $\mathcal{H}_*^{1/2}$.*

2. *Der Teilraum $\mathcal{H}_+^{1/2} \oplus \mathcal{H}_-^{1/2} \oplus \mathcal{N}$ ist in $\mathcal{H}_*^{1/2}$ dicht.*

Beweis. - 1. Die Abgeschlossenheit der Räume $\mathcal{H}_+^{1/2}$ und $\mathcal{H}_-^{1/2}$ zeigt man elementar unter Benutzung von (5.41).

2. Sei $f \in (\mathcal{H}_*^{1/2})'$ mit

$$\langle f, u \rangle \;=\; 0 \quad \forall\, u \in \mathcal{H}_+^{1/2} \oplus \mathcal{H}_-^{1/2} \oplus \mathcal{N}.$$

Insbesondere ist $f \in \mathcal{N}^\circ$. Nach Satz 5.7, 4) existiert ein $w \in \mathcal{H}_*^{1/2}$, so daß $\mathcal{B}(w) = f$. Nach Voraussetzung folgt

$$\langle \mathcal{B}(w), v \rangle \;=\; -\int_0^\infty (w(t), v'(t))_H \,\mathrm{d}t = 0 \quad \forall\, v \in \mathcal{H}_1 \;\text{ mit } \quad \text{f.ü. in }\; (-\infty, 0),$$
$$\langle \mathcal{B}(w), v \rangle \;=\; -\int_{-\infty}^0 (w(t), v'(t))_H \,\mathrm{d}t = 0 \quad \forall\, v \in \mathcal{H}_1 \;\text{ mit } \quad \text{f.ü. in }\; (0, +\infty).$$

Hieraus schließt man, daß w eine konstante Funktion ist. Somit ist $f = 0$, was die Dichtheitsaussage beweist. ∎

5.4 Existenz schwacher Lösungen abstrakter parabolischer Gleichungen

Wir beginnen mit einigen bekannten Resultaten, deren Beweise in der Literatur zu finden sind.

Lemma 5.10 *Sei $A : X \to X'$ ein radialstetiger, monotoner Operator. Sei $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und seien $x \in X, f \in X'$ so daß*

(i) $x_m \rightharpoonup x$ *in* X, $A(x_m) \rightharpoonup f$ *in* X' *für* $m \to +\infty$,

(ii) $\limsup\limits_{m\to\infty} \mathrm{Re}\langle A(x_m), x_m\rangle \le \mathrm{Re}\langle f, x\rangle$.

Dann gilt:

$$A(x) = f. \tag{5.55}$$

(vgl. in [Gajewski et al. (1974)], Kapitel III, Lemma 1.3.) ∎

Satz 5.10 *Sei X ein reflexiver Banach-Raum. Sei $A : X \to X'$ ein monotoner, stetiger, beschränkter und koerzitiver Operator. Ferner sei $L : D(L) \subset X \to X'$ ein positiver, abgeschlossener und maximal monotoner linearer Operator. Dann existiert für jedes $f \in X'$ ein $u \in D(L)$, so daß*

$$A(u) + L(u) = f.$$

(Zum Beweis von Satz 5.10 siehe in [Lions (1972)].) ∎

Ein Existenzsatz für eine parabolische Gleichung in $\mathbb{R}$

Sei H ein Hilbert-Raum. Sei $1 < p < +\infty$ fixiert. In den folgenden Ausführungen sei X ein reflexibler, separabler Banach-Raum, der bezüglich H der Bedingung $(\mathfrak{R})_p$ genüge. Wir setzen

$$\begin{aligned}
\mathcal{X} &:= L^p(\mathbb{R}; X),\\
\mathcal{X}^+ &:= \Big\{u \in \mathcal{X} \,\Big|\, u = 0 \ \text{ f.ü. in } \ (-\infty, 0)\Big\},\\
\mathcal{X}^- &:= \Big\{u \in \mathcal{X} \,\Big|\, u = 0 \ \text{ f.ü. in } \ (0, +\infty)\Big\}.
\end{aligned}$$

Satz 5.11 *Sei $\mathcal{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ ein monotoner und stetiger Operator mit*

$$(5.56) \qquad \operatorname{Re}\langle \mathcal{A}(u), u\rangle \geq \nu_0 \|u\|_{\mathcal{X}}^p - a_0 \quad \forall\, u \in \mathcal{X}^+ \quad (\nu_0, a_0 = \text{const} > 0);$$

$$(5.57) \qquad \|\mathcal{A}(u)\|_{\mathcal{X}'} \;\leq\; c_0 \|u\|_{\mathcal{X}}^{p-1} \;+\; c_1 \quad \forall\, u \in \mathcal{X} \quad (c_0, c_1 = \text{const});$$

$$(5.58) \qquad \operatorname{Re}\langle \mathcal{A}(u), v\rangle \;=\; 0 \quad \forall\, u \in \mathcal{X},\ \forall\, v \in \mathcal{X}^-.$$

Dann gibt es zu jedem $F \in (\mathcal{X} \cap \mathcal{H}_*^{1/2})'$ *mit* $\langle F, v\rangle = 0$ *für jedes* $v \in \mathcal{X}^- \cap \mathcal{H}_-^{1/2}$ *ein* $u \in \mathcal{X}^+ \cap \mathcal{H}_+^{1/2}$*, so daß*

$$\mathcal{A}(u) + \mathcal{B}(u) \;=\; F.$$ [9)]

Beweis. - Sei $F \in (\mathcal{X} \cap \mathcal{H}_*^{1/2})'$ mit $\langle F, v\rangle = 0$ für alle $v \in \mathcal{X}^- \cap \mathcal{H}_-^{1/2}$ fixiert.

1° *Regularisierung des Problems*: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Für jede Funktion $v \in \mathcal{X} \cap \mathcal{H}$ gehört das Steklov-Mittel

$$v_{(\varepsilon)}(t) := \int_0^1 v(t + \varepsilon s)\,\mathrm{d}s \quad (t \in \mathbb{R})$$

zu $\mathcal{X} \cap \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{X} \cap \mathcal{H}_*^{1/2}$ und es gilt:

$$v'_{(\varepsilon)}(t) \;=\; \frac{1}{\varepsilon}\big(v(t+\varepsilon) - v(t)\big) \quad \text{ffa. } t \in \mathbb{R}.$$

Nun definieren wir

$$\langle F_\varepsilon, v\rangle := \langle F, v_{(\varepsilon)}\rangle \quad (v \in \mathcal{H}).$$

Dann ist $F_\varepsilon \in (\mathcal{X} \cap \mathcal{H})'$. In der Tat, für beliebiges $v \in \mathcal{X} \cap \mathcal{H}$ gilt:

$$\begin{aligned} |\langle F_\varepsilon, v\rangle| &\leq \|F\|_{(\mathcal{X}\cap\mathcal{H}_*^{1/2})'}\big(\|v_{(\varepsilon)}\|_{\mathcal{X}} + \|v_{(\varepsilon)}\|_{\mathcal{H}_*^{1/2}}\big) \leq \\ &\leq \|F\|_{(\mathcal{X}\cap\mathcal{H}_*^{1/2})'}\big(\|v\|_{\mathcal{X}} + \|v_{(\varepsilon)}\|_{\mathcal{H}_1}\big) \leq \\ &\leq \|F\|_{(\mathcal{X}\cap\mathcal{H}_*^{1/2})'}\Big(\|v\|_{\mathcal{X}} + \Big(1 + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)\|v\|_{\mathcal{H}}\Big). \end{aligned}$$

Außerdem haben wir $\langle F_\varepsilon, v\rangle = 0$ für alle $v \in \mathcal{X} \cap \mathcal{H}$ mit $v = 0$ f.ü. in $(0, +\infty)$.

Als nächstes definieren wir den Operator

$$\mathcal{A}_\varepsilon : L^p(0,+\infty; X) \cap L^2(0,+\infty; H) \to L^{p'}(0,+\infty; X') + L^2(0,+\infty; H)$$

[9)] Hier bezeichne $\mathcal{B} : \mathcal{H}_*^{1/2} \to (\mathcal{H}_*^{1/2})'$ den Operator der Zeitableitung auf $\mathbb{R}$ (siehe Abschnitt 5.3).

durch die Vorschrift:

$$\langle \mathcal{A}_\varepsilon u, v\rangle := \varepsilon(u,v)_{L^2(0,+\infty;H)} + \langle \mathcal{A}(u), v\rangle \quad (u, v \in L^p(0,+\infty;X) \cap L^2(0,+\infty;H)).$$

Nach Voraussetzung ist der Operator $\mathcal{A}_\varepsilon$ koerzitiv, stetig und beschränkt. Ferner ist der Operator $Lu := u'$ mit $D(L) := W_0(0,+\infty;X,H)$ nach Satz 5.2 positiv, abgeschlossen und maximal monoton. Aufgrund von Satz 5.10 existiert also ein $u_\varepsilon \in W_0(0,+\infty;X,H)$ mit

$$\mathcal{A}_\varepsilon(u_\varepsilon) + Lu_\varepsilon \;=\; F_\varepsilon. \tag{5.59}$$

Wir setzen u_ε auf $(-\infty,0)$ durch 0 fort und bezeichnen diese Fortsetzung ebenfalls mit u_ε. Beachtet man (5.58), so verifiziert man mit Hilfe partieller Integration (siehe Folgerung 5.3) für jedes $v \in W(\mathbb{R};X,H)$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \overline{\langle v'(t), u_\varepsilon(t)\rangle}\,\mathrm{d}t \;&=\; -(\iota(v)(0),\iota(u_\varepsilon)(0))_H \;-\; \int_0^\infty \langle u_\varepsilon'(t), v(t)\rangle\,\mathrm{d}t \;=\\ &=\; -\int_0^\infty \langle u_\varepsilon'(t), v(t)\rangle\,\mathrm{d}t \;=\\ &=\; \langle \mathcal{A}_\varepsilon(u_\varepsilon), v\rangle \;-\; \langle F_\varepsilon, v\rangle.\end{aligned}$$

Hieraus folgt $u_\varepsilon \in W(\mathbb{R};X,H)$. Der Satz 5.3 liefert nunmehr $u_\varepsilon \in \mathcal{X}^+ \cap \mathcal{H}_+^{1/2}$. Beachtet man, daß die Menge $\mathcal{X} \cap \mathcal{H}_1$ in $\mathcal{X} \cap \mathcal{H}_*^{1/2}$ dicht [10] ist, so erhält man die Gültigkeit der folgenden Identität:

$$\varepsilon(u_\varepsilon, v)_{\mathcal{H}} \;+\; \langle \mathcal{A}(u_\varepsilon), v\rangle \;+\; \langle \mathcal{B}(u_\varepsilon), v\rangle \;=\; \langle F_\varepsilon, v\rangle \quad \forall\, v \in \mathcal{X} \cap \mathcal{H}_*^{1/2}. \tag{5.60}$$

2° *A-priori-Abschätzung für u_ε in $\mathcal{X} \cap \mathcal{H}_*^{1/2}$*: Für beliebige $\varepsilon > 0$ und für $v \in \mathcal{X} \cap \mathcal{H}_{1/2}$ bekommt man unter Verwendung des Satzes von Plancherel

$$\begin{aligned}|\langle F_\varepsilon, v\rangle| \;&=\; |\langle F, v_{(\varepsilon)}\rangle| \;\le\; \|F\|_{(\mathcal{X}\cap\mathcal{H}_*^{1/2})'} \|v_{(\varepsilon)}\|_{\mathcal{X}\cap\mathcal{H}_*^{1/2}} \;\le\\ &\le\; \|F\|_{(\mathcal{X}\cap\mathcal{H}_*^{1/2})'} \left\{ \|v_{(\varepsilon)}\|_{\mathcal{X}} \;+\; \left(\int_{-1}^{\varepsilon} \|v(t)\|_H^2\,\mathrm{d}t \;+\; \int_{\mathbb{R}} |t|\|\hat{v}(t)\|_H^2\,\mathrm{d}t \right)^{1/2} \right\} \;\le\\ &\le\; c\,\|F\|_{(\mathcal{X}\cap\mathcal{H}_*^{1/2})'} \|v\|_{\mathcal{X}\cap\mathcal{H}_*^{1/2}}.\end{aligned}$$

Folglich ist die Menge der Funktionale $\{F_\varepsilon \,|\, 0 < \varepsilon < 1\}$ in $(\mathcal{X} \cap \mathcal{H}_*^{1/2})'$ beschränkt.

Aus $u_\varepsilon = 0$ f.ü. in $(-\infty,0)$ ergibt sich:

---

[10] Diese Dichtheitsaussage verifiziert man mit der gleichen Abschneidetechnik wie im Beweis von Satz 5.6.

$$\|u_\varepsilon\|^2_{\mathcal{H}^{1/2}_*} = \int_{\mathbb{R}} |\tau| \|\hat{u_\varepsilon}(\tau)\|^2_H \,\mathrm{d}\tau = \langle \mathcal{B}(u_\varepsilon), -\mathfrak{R}u_\varepsilon \rangle.$$

Da $\mathfrak{R}u_\varepsilon \in \mathcal{X} \cap \mathcal{H}_{1/2}$ ist, können wir die Funktion

$$v := u_\varepsilon - \delta_0 \mathfrak{R}u_\varepsilon \quad \text{mit} \quad \delta_0 := \frac{\nu_0}{4c_0\|\mathfrak{R}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{X})}}$$

in die Identität (5.60) einsetzen und erhalten unter Berücksichtigung der Bedingungen (5.56), (5.57) mit Hilfe der Youngschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\|u_\varepsilon\|_{\mathcal{H}} + \nu_0\|u_\varepsilon\|^p_{\mathcal{X}} + \delta_0\|u_\varepsilon\|^2_{\mathcal{H}^{1/2}_*} \le \\
&\quad \le \varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon)_{\mathcal{H}} + \operatorname{Re}\langle \mathcal{A}(u_\varepsilon), u_\varepsilon\rangle - \delta_0 \operatorname{Re}\langle \mathcal{B}(u_\varepsilon), \mathfrak{R}u_\varepsilon\rangle + a_0 = \\
&\quad = \operatorname{Re}\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon - \delta_0\mathfrak{R}u_\varepsilon)_{\mathcal{H}} + \operatorname{Re}\langle \mathcal{A}(u_\varepsilon), u_\varepsilon\rangle + \operatorname{Re}\langle \mathcal{B}(u_\varepsilon), u_\varepsilon - \delta_0\mathfrak{R}u_\varepsilon\rangle + a_0 = \\
&\quad = \operatorname{Re}\varepsilon(u_\varepsilon, v)_{\mathcal{H}} + \operatorname{Re}\langle \mathcal{A}(u_\varepsilon), v\rangle + \operatorname{Re}\langle \mathcal{B}(u_\varepsilon), v\rangle + \delta_0 \operatorname{Re}\langle \mathcal{A}(u_\varepsilon), \mathfrak{R}u_\varepsilon\rangle + a_0 = \\
&\quad = \operatorname{Re}\langle F_\varepsilon, v\rangle + \delta_0 \operatorname{Re}\langle \mathcal{A}(u_\varepsilon), \mathfrak{R}u_\varepsilon\rangle + a_0 \le \\
&\quad \le C_0\Big(\|u_\varepsilon\|_{\mathcal{X}} + \|u_\varepsilon\|_{\mathcal{H}^{1/2}_*}\Big) + \frac{\nu_0}{4}\|u_\varepsilon\|^p_{\mathcal{X}} + C_1 \le \frac{\nu_0}{2}\|u_\varepsilon\|^p_{\mathcal{X}} + \frac{\delta_0}{2}\|u_\varepsilon\|^2_{\mathcal{H}^{1/2}_*} + C_2.
\end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\varepsilon\|u_\varepsilon\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{\nu_0}{2}\|u_\varepsilon\|^p_{\mathcal{X}} + \frac{\delta_0}{2}\|u_\varepsilon\|^2_{\mathcal{H}^{1/2}_*} \le C_2 \quad (C_2 = \text{const}). \tag{5.61}$$

Also ist die Menge $\{u_\varepsilon | 0 < \varepsilon < 1\}$ in $\mathcal{X} \cap \mathcal{H}^{1/2}_*$ beschränkt.

3° *Grenzübergang* $\varepsilon \to 0$: Aufgrund der Reflexivität der Räume $\mathcal{X}$ und $\mathcal{H}^{1/2}_*$ und der Beschränktheit des Operators $\mathcal{A}$, kann man eine Teilfolge (u_{ε_j}) so auswählen, daß

$$\begin{cases} u_{\varepsilon_j} \rightharpoonup u \quad \text{in} \quad \mathcal{X} \cap \mathcal{H}^{1/2}_*, \quad \mathcal{A}(u_{\varepsilon_j}) \rightharpoonup v^* \quad \text{in} \quad \mathcal{X}' \\ \text{für} \quad j \to +\infty. \end{cases}$$

Sei $v \in \mathcal{X} \cap \mathcal{H}_{1/2}$. Dann folgt mit Hilfe von Lemma 5.4

$$v_{(\varepsilon_j)} \to v \quad \text{in} \quad \mathcal{X} \cap \mathcal{H}^{1/2}_* \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

Dies impliziert

$$F_{\varepsilon_j} \rightharpoonup F \quad \text{in} \quad (\mathcal{X} \cap \mathcal{H}^{1/2}_*)' \quad \text{für} \quad j \to +\infty. \tag{5.62}$$

Außerdem erhält man unmittelbar aus der Definition des Operators $\mathcal{B}$

$$(5.63) \qquad \langle \mathcal{B}(u_{\varepsilon_j}), v\rangle \;=\; -\overline{\langle \mathcal{B}(v), u_{\varepsilon_j}\rangle} \to -\overline{\langle \mathcal{B}(v), u\rangle} \;=\; \langle \mathcal{B}(u), v\rangle \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

Somit haben wir unter Verwendung von (5.60), (5.61) (5.62) und (5.63)

$$\begin{aligned}\langle F, v\rangle \;&=\; \lim_{j\to\infty}\langle F_\varepsilon, v\rangle \;=\\ &=\; \lim_{j\to\infty}(\varepsilon_j(u_{\varepsilon_j}, v) \;+\; \langle \mathcal{A}(u_{\varepsilon_j}), v\rangle \;+\; \langle \mathcal{B}(u_{\varepsilon_j}), v) \;=\\ &=\; \langle v^*, v\rangle \;+\; \langle \mathcal{B}(u), v\rangle.\end{aligned}$$

Aufgrund der Dichtheit von $\mathcal{X}\cap\mathcal{H}_{1/2}$ in $\mathcal{X}\cap\mathcal{H}_*^{1/2}$ folgt für jedes $v \in \mathcal{X}\cap\mathcal{H}_*^{1/2}$ die Identität:

$$(5.64) \qquad \langle F, v\rangle \;=\; \langle v^*, v\rangle \;+\; \langle \mathcal{B}(u), v\rangle.$$

Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß $v^* = \mathcal{A}(u)$. Beachtet man

$$\operatorname{Re}\langle \mathcal{B}(u), u\rangle \;=\; 0, \quad \operatorname{Re}\langle \mathcal{B}(u_{\varepsilon_j}), u_{\varepsilon_j}\rangle \;=\; 0 \;\; \forall j \in \mathbb{N},$$

so ergibt sich wegen (5.60) und (5.64)

$$\limsup_{j\to\infty} \operatorname{Re}\langle \mathcal{A}(u_{\varepsilon_j}), u_{\varepsilon_j}\rangle \;\le\; \lim_{j\to\infty} \operatorname{Re}\langle F, u_{\varepsilon_j}\rangle \;=\; \operatorname{Re}\langle F, u\rangle \;=\; \operatorname{Re}\langle v^*, u\rangle.$$

Nach Anwendung von Lemma 5.10 bekommt man $v^* = \mathcal{A}(u)$, womit u die gesuchte Lösung der Gleichung $\mathcal{A}(u) + \mathcal{B}(u) = F$ ist. ■

Existenz für ein parabolisches Anfangswertproblem in $(0, T)$

Sei $T > 0$. Seien $A(t) : X \to X'$ $(t \in (0,T)$ nichtlineare stetige Operatoren, die den folgenden Bedingungen genügen:

$$(5.65) \qquad t \mapsto \langle A(t)(\xi), \eta\rangle \quad \textit{meßbar} \quad \forall\, \xi, \eta \in X;$$

$$(5.66) \qquad \begin{cases} \|A(t)(\xi)\|_{X'} \;\le\; c_0\|\xi\|_X^{p-1} + \theta_1(t) \\ \forall\, \xi \in X,\ \text{ffa. } t \in (0,T) \quad (c_0 = \text{const}, \ \theta_1 \in L^{p'}((0,T))); \end{cases}$$

$$(5.67) \qquad \begin{cases} \operatorname{Re}\langle A(t)(\xi), \xi\rangle \ge \nu_0\|\xi\|_X^p - \theta_2(t) \quad \forall\, \xi \in X, \\ \text{ffa. } t \in (0,T) \quad (\nu_0 = \text{const} > 0,\ \theta_2 \in L^1((0,T))). \end{cases}$$

Anmerkung 5.5 1.) Die Bedingungen (5.65)−(5.67) implizieren, daß die Abbildung

$$t \mapsto A(t) \quad (t \in (0,T))$$

stark Bochner-meßbar ist, was leicht aus dem Satz von Pettis folgt (siehe in [Yoshida (1965)]).

2.) Aus der Bedingung (5.66) folgt

(5.68)
$$\begin{cases} t \mapsto A(t)(v(t)) \in L^{p'}(0,T;X'); \\ \|A(v)\|_{L^{p'}(0,T;X')} \leq 2^{1/p'} c_0 \Big(\|v\|^{p-1}_{L^p(0,T;X)} + \|\theta_1\|_{L^{p'}((0,T))} \Big) \\ \forall\, v \in L^p(0,T;X). \end{cases}$$
■

Nun definieren wir den Operator $\mathcal{A}_0 : L^p(0,T;X) \to L^{p'}(0,T;X')$ durch die Vorschrift:

$$\langle \mathcal{A}_0 u, v\rangle := \int_0^T \langle A(t)(u(t)), v(t)\rangle \,\mathrm{d}t \quad (u, v \in L^p(0,T;X)).$$

Der Operator der Zeitableitung $\mathcal{B}_0 : H_0^{1/2}(0,T;H) \to (H_T^{1/2}(0,T;H))'$ sei wie in Abschnitt 5.3 definiert. Wir haben nun den folgenden nützlichen Existenzsatz:

Satz 5.12 *Seien $A(t) : X \to X'$ $(t \in (0,T))$ monotone, stetige Operatoren, die den Bedingungen (5.65)−(5.67) genügen. Dann ist der Operator*

$$\mathcal{A}_0 + \mathcal{B}_0 : L^p(0,T;X) \cap H_0^{1/2}(0,T;H) \to (L^p(0,T;X) \cap H_T^{1/2}(0,T;H))'$$

surjektiv.

Beweis. - Sei $F \in (L^p(0,T;X) \cap H_T^{1/2}(0,T;H))'$ beliebig gewählt. Dann existieren $g \in (L^p(0,T;X))'$ und $h \in (H_T^{1/2}(0,T;H))'$, so daß

$$F = g + h.$$

Nach dem Rieszschen Darstellungssatz existiert ein $g_0 \in L^{p'}(0,T;X')$ so, daß

$$\langle g, v\rangle = \int_0^T \langle g_0(t), v(t)\rangle \,\mathrm{d}t \quad \forall\, v \in L^p(0,T;X),$$

und nach Satz 5.8 existiert genau ein $h_0 \in H_0^{1/2}(0,T;H)$ mit

$$h = \mathcal{B}_0(h_0).$$

Wir können also das Funktional F auf folgende Weise darstellen

$$\begin{cases} \langle F, v\rangle = \displaystyle\int_0^T \langle g_0(t), v(t)\rangle \,\mathrm{d}t - \int_0^T (h_0(t), v'(t))_H \,\mathrm{d}t \\ \forall\, v \in L^p(0,T;X) \cap W_2^1(0,T;H) \quad \text{mit} \quad \operatorname{supp}(v) \subset\subset (0,T). \end{cases}$$

1° *Fortsetzung auf* $\mathbb{R}$: Wir definieren das Funktional $\tilde{g} \in \mathcal{X}'$ durch

$$\langle \tilde{g}, v\rangle := \langle g_0, v|_{(0,T)}\rangle \quad (v \in \mathcal{X})$$

und setzen $\tilde{h} := \mathcal{B}(\mathcal{S}_0^+ h_0) \in (\mathcal{H}_*^{1/2})'$. Dann ist

$$\tilde{F} : v \mapsto \langle \tilde{g}, v\rangle + \langle \tilde{h}, v\rangle$$

ein lineares stetiges Funktional auf $\mathcal{X} \cap \mathcal{H}_*^{1/2}$ mit der Eigenschaft:

$$\langle \tilde{F}, v\rangle = 0 \quad \forall\, v \in \mathcal{X}^- \cap \mathcal{H}_-^{1/2}.$$

Als nächstes definieren wir $\mathcal{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ durch

$$\langle \mathcal{A}(u), v\rangle := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \int_{kT}^{(k+1)T} \langle A(t-kT)(2^{k/(p-1)} u(t)), v(t)\rangle \,\mathrm{d}t \quad (u, v \in \mathcal{X}).$$

Beachtet man die Bedingung (5.66), so folgt mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{A}(u), v\rangle| &\le c_0 \int_{\mathbb{R}} \|u(t)\|_X^{p-1} \|v(t)\|_X \,\mathrm{d}t + \\ &\qquad + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \int_{kT}^{(k+1)T} |\theta_1(t-kT)| \|v(t)\|_X \,\mathrm{d}t \le \\ &\le 2\Big(c_0 \|u\|_{\mathcal{X}}^{p-1} + \|\theta_1\|_{L^{p'}((0,T))}\Big) \|v\|_{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

Hieraus schließt man

$$\|\mathcal{A}(u)\|_{\mathcal{X}'} \le c_0 \|u\|_{\mathcal{X}}^{p-1} + c_1 \quad \forall\, u \in \mathcal{X} \quad (c_0, c_1 = \text{const}).$$

Auf der anderen Seite folgt aus (5.67)

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\langle \mathcal{A}(u), u\rangle \;&\geq\; \nu_0 \int_0^\infty \|u(t)\|_X^p \,\mathrm{d}t \;-\; \sum_{k=0}^\infty 2^{-k} \int_{kT}^{(k+1)T} |\theta_2(t-kT)|^p \,\mathrm{d}t \;\geq \\ &\geq\; \nu_0 \int_0^\infty \|u(t)\|_X^p \,\mathrm{d}t \;-\; 2\|\theta_2\|_{L^1((0,T))}.\end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\langle \mathcal{A}(u), u\rangle \;\geq\; \nu_0 \|u\|_{\mathcal{X}}^p - a_0 \quad \forall\, u \in \mathcal{X}^+ \quad (a_0 = \mathrm{const}).$$

Somit sind sämtliche Voraussetzungen von Satz 5.11 erfüllt. Es existiert also ein $\tilde{u} \in \mathcal{X}^+ \cap \mathcal{H}_+^{1/2}$ mit

$$\mathcal{A}(\tilde{u}) \;+\; \mathcal{B}(\tilde{u}) \;=\; \tilde{F}.$$

Dann gehört die Funktion $u := \tilde{u}\big|_{(0,T)}$ zu $L^p(0,T;X) \cap H_0^{1/2}(0,T;H)$ und genügt der Identität:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T \langle A(t)(u(t)), v(t)\rangle \,\mathrm{d}t - \int_0^T (u(t), v'(t))_H \,\mathrm{d}t \;=\; \langle F, v\rangle \\ \forall\, v \in L^p(0,T;X) \cap W_2^1(0,T;H) \qquad \text{mit} \qquad v(T) = 0. \end{cases}$$

Somit ist u Lösung der Gleichung $\mathcal{A}_0(u) + \mathcal{B}_0(u) = F$. ■

Kapitel 6

Differenzierbarkeit

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Fragen höherer Differenzierbarkeit schwacher Lösungen nichtlinearer parabolischer Systeme partieller Differentialgleichungen. Zuerst werden wir unter geeigneten Voraussetzungen an die Koeffizienten zeigen, daß die Zeitableitung der schwachen Lösung existiert und lokal zu L^2 gehört. Anschließend behandeln wir das Problem der Existenz der zweiten schwachen Ableitungen bezüglich der Ortsvariablen schwacher Lösungen. Weiterhin beweisen wir auf der Grundlage der im Kapitel 5 gemachten Ausführungen für schwache Lösungen eines nichtlinearen parabolischen Systems $H^{1/2}$-Differenzierbarkeit sowie die Gültigkeit der Kaplan-Bedingung fast überall.

Wir beginnen mit der Einführung der wichtigsten Funktionenräume, die wir sowohl in diesem als auch in den nachfolgenden Kapiteln benötigen werden. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Seien $-\infty < a < b < +\infty$. Wir setzen $Q := \Omega \times (a, b)$ und definieren für $1 < p < +\infty$

$$\begin{aligned}
W_p^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N) &:= \left\{ u \in L^2(Q;\mathbb{R}^N) \,\Big|\, \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \in L^p(Q;\mathbb{R}^N) \ (\alpha = 1, \ldots, n) \right\}, \\
W_p^{1,1}(Q;\mathbb{R}^N) &:= \left\{ u \in W_p^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N) \,\Big|\, \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q;\mathbb{R}^N) \right\} \cong W_p^1(Q;\mathbb{R}^N), \\
V_p^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N) &:= \left\{ u \in W_p^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N) \,\Big|\, \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \int_\Omega |u(\cdot,t)|^2 \,\mathrm{d}x \, < \, +\infty \right\}.
\end{aligned}$$

Ferner bezeichnen $W_p^m(\Omega;\mathbb{R}^N)$ (bzw. $\mathring{W}_p^m(\Omega;\mathbb{R}^N)$) $(m \in \mathbb{N} \geq 1;\ 1 \leq p \leq +\infty)$ die üblichen Sobolev-Räume.

Anmerkung 6.1 *Sei* $\dfrac{2n}{n+2} < q < n$. *Wir notieren nun die folgenden stetigen Einbettungen und elementaren Interpolationsungleichungen*:

(i) *Wir nehmen an, daß* $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$. *Dann haben wir die folgende stetige Einbettung*:

$$(6.1) \qquad V_q^{1,0}(Q) \subset L^{q(n+2)/n}(Q).$$

Weiterhin existiert eine Konstante c, die nur von q, n und Ω abhängt, so daß für beliebige $v \in V_q^{1,0}(Q)$ gilt:

$$(6.2) \qquad \|v\|_{L^{q(n+2)/n}(Q)} \le c \Big(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(a,b)} \|v(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \Big)^{2/(n+2)} \Big(\|\nabla v\|_{L^q(Q)} + \|v\|_{L^q(Q)} \Big)^{n/(n+2)}.$$

Ist insbesondere $\Omega = B_R$, so haben wir für beliebige $v \in V_q^{1,0}(B_R \times (a,b))$

$$(6.3) \qquad \int_a^b \int_{B_R} |v|^{q(n+2)/n} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \le c \Big(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(a,b)} \int_{B_R} |v(\cdot,t)|^2 \, \mathrm{d}x \Big)^{q/n} \times$$
$$\times \Big(\int_a^b \int_{B_R} |\nabla v|^q \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + R^{-q} \int_a^b \int_{B_R} |v|^q \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \Big),$$

wobei $c = \text{const}$ nicht von der speziellen Wahl der Kugel $B_R \in \mathbb{R}^n$ abhängt.

(ii) *Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $\zeta \in C_c^1(\Omega)$. Dann gilt:*

$$(6.4) \qquad v\zeta \in L^{q(n+2)/n}(Q) \quad \text{für alle} \quad v \in V_q^{1,0}(Q).$$

Beweis. - Sei $v \in V_q^{1,0}(Q)$. Unter Verwendung von Lemma B.1 (mit $p_0 = +\infty, q_0 = 2, p_1 = q, q_1 = q^*$ und $\theta = n/(n+2)$) erhält man

$$(6.5) \qquad \|v\|_{L^{q(n+2)/n}(Q)} \le \|v\|^{2/(n+2)}_{L^\infty(a,b;L^2(\Omega))} \|v\|^{n/(n+2)}_{L^q(a,b;L^{q^*}(\Omega))}.$$

Die Aussagen (6.1) und (6.2) folgen nun unmittelbar aus dem Sobolevschen Einbettungssatz. Die Ungleichung (6.3) folgt leicht aus (6.2) unter Benutzung eines Standard-Homothetie-Argumentes.

Weiterhin sei $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$. Wir setzen $w(x,t) := v(x,t)\zeta(x)$ ($\{x,t\} \in Q$). Dann folgt, aufgrund von $w(\cdot,t) \in \overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega)$ für fast alle $t \in (a,b)$, aus (6.5) und Anwendung der Poincaré-Ungleichung

$$(6.6) \qquad \|w\|_{L^{q(n+2)/n}(Q)} \le c \|w\|^{2/(n+2)}_{L^\infty(a,b;L^2(\Omega))} \|\nabla w\|^{n/(n+2)}_{L^q(Q)}$$

($c = c(n,q) = \text{const}$). Dies impliziert (6.4). ∎

6.1 Existenz der Zeitableitung in L^2

Wir beginnen mit der Formulierung der Aufgabenstellung: Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N} \geq 2)$ offen und beschränkt. Mit Q bezeichnen wir den Zylinder $\Omega \times (0,T)$ $(0 < T < +\infty)$. Wir betrachten das folgende parabolische System partieller Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} - D_\alpha A_i^\alpha(x,t,\nabla u) = g^i \qquad \text{in} \quad Q \qquad (i = 1,\dots,N), \tag{6.7}$$

wobei die Koeffizienten $A_i^\alpha : Q \times \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}^N$ $(\alpha = 1,\dots,n; i = 1,\dots,N)$ Carathéodory-Funktionen seien und außerdem den folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{cases} |A_i^\alpha(x,s,\eta) - A_i^\alpha(x,t,\xi)| \leq \\ \leq c_0\Big\{|s-t|^\mu(1+|\eta|+|\xi|)^{q-1} + (1+|\eta|+|\xi|)^{q-2}|\eta-\xi|\Big\} \\ \forall\, x \in \Omega,\ \forall\,\{s,\eta\},\{t,\xi\} \in (0,T) \times \mathbb{R}^{nN} \\ (c_0 = \text{const}; 0 < \mu \leq 1); \end{cases} \tag{6.8}$$

$$\begin{cases} |A_i^\alpha(x,t,\xi)| \leq c_1(1+|\xi|)^{q-1} \\ \forall\,\{x,t,\xi\} \in Q \times \mathbb{R}^{nN} \quad (c_1 = \text{const} > 0) \end{cases} \tag{6.9}$$

$(\alpha = 1,\dots,n; i = 1,\dots,N)$;

$$\begin{cases} (A_i^\alpha(x,t,\eta) - A_i^\alpha(x,t,\xi))(\eta_\alpha^i - \xi_\alpha^i) \geq \\ \geq \nu_0(1+|\eta|+|\xi|)^{q-2}|\eta-\xi|^2 \\ \forall\,\{x,t\} \in Q,\ \forall\,\eta,\xi \in \mathbb{R}^{nN} \quad (\nu_0 = \text{const} > 0). \end{cases} \tag{6.10}$$

Als nächstes erklären wir den Begriff der schwachen Lösung des Systems (6.7).

Definition 6.1 *Sei (6.9) erfüllt und sei $g \in L^2(Q;\mathbb{R}^N)$. Dann heißt $u \in V_q^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N)$* **schwache Lösung des Systems** (6.7), *falls die folgende Integralidentität für beliebige $C_c^1(Q;\mathbb{R}^N)$ erfüllt ist:*

$$-\int_Q u^i \frac{\partial \varphi^i}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_Q A_i^\alpha(x,t,\nabla u) D_\alpha \varphi^i\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_Q g^i \varphi^i\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{6.11}$$

■

In [Naumann et al. (1998)] konnte unter der zusätzlichen Voraussetzung $\frac{1}{2} < \mu \leq 1$ für den stark monotonen Fall $q = 2$ und $g \equiv 0$ gezeigt werden, daß die Zeitableitung

$\dfrac{\partial u}{\partial t}$ der schwachen Lösung von (6.7) existiert und für beliebige Teilzylinder $Q' \subset\subset Q$ zu $L^2(Q';\mathbb{R}^N)$ gehört. In früheren Arbeiten (vgl. Nečas, Šverák [Nečas and Šverák (1991)] und John, Stara [John and Stará (1998)]) wurden analoge Resultate, jedoch unter stärkeren Voraussetzungen an die Koeffizienten erzielt. Im vorliegenden Abschnitt werden wir das oben zitierte Resultat für den Fall $1 < q < 2$ mit einer beliebigen rechten Seite $g \in L^2(Q;\mathbb{R}^N)$ mit $\dfrac{\partial g}{\partial t} \in L^2(Q)$ beweisen, wobei wir auf die in [Naumann et al. (1998)] benutzte Methode zurückgreifen werden.

Die folgenden bekannten Aussagen zur Zeitdifferenz bzw. zum Steklov-Mittel dienen zur Vorbereitung und können in der Literatur nachgeschlagen werden:

1. *Die Zeitdifferenz*: Sei $f \in L^p(Q)$ $(1 \leq p < +\infty)$. Wie oben setzen wir f auf $\Omega \times \mathbb{R}$ durch 0 fort und bezeichnen diese Fortsetzung ebenfalls mit f. Die Zeitdifferenz von f ist dann folgendermaßen definiert:

$$(\Delta_h f)(x,t) := f(x,t+h) - f(x,t) \quad (\{x,t\} \in Q; h > 0).$$

Wir haben nun die folgende bekannte Differenzenabschätzung (siehe zum Beispiel in [Gilbarg and Trudinger (1977)]): Sei $f \in L^p(Q)$ mit $\dfrac{\partial f}{\partial t} \in L^p(Q)$. Sei $t_1 \in (0,T)$. Dann gilt für beliebige $0 < h < T - t_1$:

$$\int_0^{t_1} \int_\Omega |\Delta_h f|^p \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leq h^p \int_Q \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|^p \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{6.12}$$

2. *Das Steklov-Mittel*: Sei $f \in L^p(Q)$ $(1 \leq p < +\infty)$. Wir setzen f auf $\Omega \times \mathbb{R}$ durch 0 fort und bezeichnen diese Fortsetzung ebenfalls mit f. Das Steklov-Mittel von f ist dann definiert vermöge der Vorschrift

$$f_\lambda(x,t) := \frac{1}{\lambda}\int_t^{t+\lambda} f(x,s)\,\mathrm{d}s \quad (\{x,t\} \in Q;\ \lambda > 0).$$

Man verifiziert nun leicht die folgenden aus der Literatur bekannten Eigenschaften (Siehe zum Beispiel in [Ladyzenskaya et al. (1968), Naumann et al. (1998)]):

(i) Für beliebige $0 \leq t_0 < t_1 < T$ gilt:

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_\Omega |f_\lambda(x,t)|^p \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leq \int_{t_1}^{T} \int_\Omega |f(x,t)|^p \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \qquad \forall\, 0 < \lambda < T - t_1, \tag{6.13}$$

und

$$f_\lambda \to f \quad \text{in} \quad L^p(Q) \qquad \text{für} \quad \lambda \to 0.$$

(ii) Für jedes $\lambda > 0$ besitzt die Funktion f_λ eine schwache Ableitung $\dfrac{\partial f_\lambda}{\partial t} \in L^p(Q)$. Ferner haben wir

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{\lambda}(f(x,t+\lambda) - f(x,t)) \quad \text{ffa. } \{x,t\} \in Q, \ \forall \lambda > 0. \tag{6.14}$$

(iii) Ist außerdem $D_\alpha f \in L^p(Q)$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$, so gilt:

$$(D_\alpha f_\lambda)(x,t) = (D_\alpha f)_\lambda(x,t) \qquad \text{ffa. } \{x,t\} \in Q, \ \forall \lambda > 0. \tag{6.15}$$

Sei (6.9) erfüllt und sei $u \in V_q^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung des Systems (6.7). Sei $\Omega' \subset\subset \Omega$ eine offene Menge mit $\Omega' \in \mathcal{C}^{0,1}$. Ferner sei $0 < t_1 < T$ beliebig fixiert. Nach Einführung des Steklov-Mittels erhält man die folgende Lokalisierung von (6.11)

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial u^i_\lambda}{\partial t}(x,t)\psi^i(x)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega (A_i^\alpha)_\lambda(x,t) D_\alpha\psi^i(x)\,\mathrm{d}x \\ \displaystyle = \int_\Omega g^i_\lambda(x,t)\psi^i(x)\,\mathrm{d}x \\ \text{ffa. } t \in (0,t_1), \ \forall\, 0 < \lambda < T - t_1, \ \forall \psi \in \overset{\circ}{W}{}^1_q(\Omega';\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{6.16}$$

(Mit einem analogem Argument wie in [Naumann and Wolff, M. (1994)] stellt man fest, daß die Menge vom Maß Null, für die (6.16) nicht gilt, unabhängig von λ gewählt werden kann.)

Ähnlich wie in [Naumann et al. (1998)] beweist man ausgehend von (6.16) das folgende

Lemma 6.1 *Sei (6.9) erfüllt und sei $g \in L^2(Q;\mathbb{R}^N)$. Sei $u \in V_q^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung von (6.7). Dann haben wir für alle $0 < h < T - t_1$ die folgende Abschätzung*

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega'} |\Delta_h u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \ &\le\ c\left(1 + \int_Q |\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \times \\ &\times\left(\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega''} (1 + |\nabla u(\cdot,t+h)| + |\nabla u(\cdot,t)|)^{q-2}|\Delta_h \nabla u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} + \\ &+ c\,h\int_Q |g|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{6.17}$$

für alle $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$ und $0 \le t_0 < t_1 < T$, wobei $c = \mathrm{const} > 0$ nur von c_1 und $1/\operatorname{dist}(\Omega'', \partial\Omega')$ abhängt.

Beweis. - Seien offene Mengen $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$ und $0 \le t_0 < t_1 < T$ beliebig gewählt. Mit $\zeta \in C_c^\infty(\Omega'')$ bezeichnen wir eine *Schnittfunktion*, so daß: $0 \le \zeta \le 1$ in Ω'' und $\zeta \equiv 1$ auf Ω'. Sei $0 < h < T - t_1$ beliebig, aber fixiert. Setzt man in (6.14) $\lambda = h$, so ergibt sich

$$\frac{\partial u_h}{\partial t}(x,t) \;=\; \frac{1}{h}(\Delta_h u)(x,t) \qquad \text{ffa. } \{x,t\} \in \Omega'' \times (0,t_1).$$

Nach Einsetzen der zulässigen Testfunktion $\psi(x) = (\Delta_h u)(x,t)\zeta^2(x)$ $(x \in \Omega'', t \in (t_0,t_1))$ in (6.11) und Integration über das Intervall (t_0,t_1) folgt unter Berücksichtigung von (6.13) mit Hilfe der Youngschen Ungleichung:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega''} |\Delta_h u|^2\zeta^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;= \\
&\quad = -\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega''} (A_i^\alpha)_h((\Delta_h D_\alpha u^i)\zeta^2 \;+\; (\Delta_h u^i)(D_\alpha\zeta)\zeta)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,+ \\
&\qquad + \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega'} g^i(\Delta_h u^i)\zeta^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le \\
&\quad \le \left(\int_Q |A_i^\alpha|^{q'}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/q'}\left(\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega''}|(\Delta_h D_\alpha u^i)\zeta^2 + (\Delta_h u^i)(D_\alpha\zeta)\zeta|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/q} + \\
&\qquad + 2\,h\int_Q |g|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;+\; \frac{1}{2h}\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega''}|\Delta_h u|^2\zeta^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus der letzten Ungleichung mit Hilfe der Hölderschen und der Youngschen Ungleichung unter Beachtung der Bedingung (6.9). ■

Ausgehend von (6.17) ergibt sich mit Hilfe der Youngschen Ungleichung für beliebige $0 < h < T - t_1$

$$\begin{aligned}
(6.18)\qquad &\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega'} |\Delta_h u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le \\
&\le\; c\left(h^{1+\mu} \;+\; h^{1-\mu}\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega''}(1+|\nabla u(x,t+h)|+|\nabla u(x,t)|)^{q-2}|\Delta_h\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right).
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Abschätzung (6.18) haben wir nun das

Lemma 6.2 *Seien die Bedingungen (6.8)–(6.10) erfüllt und sei $g \in L^2(Q;\mathbb{R}^N)$ mit $\dfrac{\partial g}{\partial t} \in L^2(Q;\mathbb{R}^N)$. Sei $u \in V_q^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung von (6.7). Dann gilt:*

$$(6.19)\qquad \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega'} |\Delta_h u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le\; c\,h^{1+\mu},$$

$$\begin{aligned}
(6.20)\qquad &\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0,t_1)}\int_{\Omega'} |\Delta_h u(\cdot,t)|^2\,\mathrm{d}x\,+ \\
&+\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega'}(1+|\nabla u(x,t+h)|+|\nabla u(x,t)|)^{q-2}|\Delta_h\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le\; c\,h^{2\mu}
\end{aligned}$$

für beliebige $\Omega' \subset\subset \Omega$, $0 < t_0 < t_1 < T$ *und für alle* $0 < h < T - t_1$, *wobei* $c = \text{const}$ *nicht von* h *abhängt.*

Beweis. - Seien $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega, 0 < t_0' < t_0 < t_1 < T$ beliebig, aber fixiert. Sei $\zeta \in C_c^\infty(\Omega'')$ eine Schnittfunktion, so daß $\zeta \equiv 1$ auf Ω' und $0 \le \zeta \le 1$ in Ω''. Ferner sei $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\rho \equiv 0$ in $(-\infty, t_0'], \rho \equiv 1$ in $(t_0, +\infty)$ und $0 \le \rho \le 1$ in $\mathbb{R}$. Nun bilden wir in (6.16) für fast alle $t \in (t_0', t_1)$ die Differenz Δ_h $(0 < h < T - t_1; 0 < \lambda < T - t_1 - h)$. Dort setzen wir die zulässige Testfunktion $\psi(x) = (\Delta_h u)(x,t)\zeta^2(x)\rho(t)$ $(x \in \Omega'', t \in (t_0', t_1))$ ein, integrieren über das Intervall (t_0', s) $(s \in (t_0', t_1))$, benutzen partielle Integration und führen den Grenzübergang $\lambda \to 0$ aus. Dies liefert

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\Omega''} |\Delta_h u(x,s)|^2 \zeta^2(x)\,\mathrm{d}x\,\rho(s) + \\
(6.21)\qquad &\quad + \int_{t_0'}^{s}\int_{\Omega''} (\Delta_h A_i^\alpha)((\Delta_h D_\alpha u^i)\zeta^2 \,+\, 2(\Delta_h u^i)(D_\alpha\zeta)\zeta)\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;= \\
&= \int_{t_0'}^{s}\int_{\Omega''} |\Delta_h u|^2\zeta^2\rho'\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \,+\, \int_{t_0'}^{s}\int_{\Omega''} (\Delta_h g^i)(\Delta_h u^i)\zeta^2\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Beachtet man (6.8) und (6.10), so folgt mit Hilfe der Youngschen Ungleichung:

$$
\begin{aligned}
&(\Delta_h A_i^\alpha)(x,t)((\Delta_h D_\alpha u^i)(x,t)\zeta^2(x) \,+\, 2(\Delta_h u^i)(x,t)\zeta(x)D_\alpha\zeta(x)) \ge \\
&\ge \frac{\nu_0}{2}(1 + |\nabla u(x,t+h)| + |\nabla u(x,t)|)^{q-2}|\Delta_h \nabla u(x,t)|^2\zeta^2(x) - \\
&\quad - c\,h^{2\mu}(1 + |\nabla u(x,t+h)|^q + |\nabla u(x,t)|^q) - \\
&\quad - c\,(1 + \max|\nabla\zeta|^2)|\Delta_h u(x,t)|^2
\end{aligned}
$$

für fast alle $\{x,t\} \in \Omega'' \times (t_0', t_1)$.

Aus (6.21) ergibt sich nun für fast alle $s \in (t_0', t_1)$

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega''} |\Delta_h u(\cdot,s)|^2\zeta^2\,\mathrm{d}x\rho(s) + \\
(6.22)\qquad &\quad + \nu_0\int_{t_0'}^{s}\int_{\Omega''} (1 + |\nabla u(x,t+h)| + |\nabla u(x,t)|)^{q-2}|\Delta_h\nabla u|^2\zeta^2\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le \\
&\le c\,h^{2\mu}\left(1 \,+\, \int_Q |\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right) + \\
&\quad + c\,h^2 + c\int_{t_0'}^{t_1}\int_{\Omega''} |\Delta_h u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \,+\, c\int_{t_0'}^{t_1}\int_{\Omega''} |\Delta_h g||\Delta_h u|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Die Abschätzung (6.22) impliziert nun nach Anwendung der Hölderschen Ungleichung und der Differenzenabschätzung (6.12)

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0,t_1)} \int_{\Omega'} |\Delta_h u(\cdot,t)|^2 \,\mathrm{d}x + \\
&\quad + \nu_0 \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega'} (1+|\nabla u(x,t+h)|+|\nabla u(x,t)|)^{q-2}|\Delta_h \nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \\
&\le c\left(h^{2\mu} + \int_{t_0'}^{t_1}\int_{\Omega''} |\Delta_h u|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right).
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Kombiniert man (6.18) und (6.23), wobei in (6.23) Ω' durch Ω'' und Ω'' durch Ω''' ($\Omega'' \subset\subset \Omega''' \subset\subset \Omega$) ersetzt wird, so folgt

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega'} |\Delta_h u|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le c\left(h^{1+\mu} + h^{1-\mu}\int_{t_0'}^{t_1}\int_{\Omega'''} |\Delta_h u|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right). \tag{6.24}$$

Die Behauptung (6.19) erhält man nun durch iteratives Anwenden von (6.24), während sich die zweite Abschätzung (6.20) nach Kombination der Abschätzungen (6.19) und (6.23) ergibt. ■

Mit Hilfe der soeben bewiesenen Differenzenabschätzungen, sind wir nun in der Lage die Existenz der Zeitableitung $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q')$ ($Q' \subset\subset Q$) zu beweisen, indem wir von der im Abschnitt 5.2 entwickelten Methode Gebrauch machen. Hierbei setzen wir u geeignet auf die ganze reelle Achse zu einer Funktion v fort und wenden anschließend den Satz 5.4 an.

Bemerkung: Wir weisen darauf hin, daß wir öfters integrierbare Funktionen $u : Q \to \mathbb{R}^N$ mit Bochner-meßbaren Funktionen, deren Werten in einen entsprechenden Banach-Raum liegen, gemäß einer kanonischen Isometrie identifizieren. Korrekterweise müsste man hierfür getrennte Bezeichnungen einführen, worauf wir jedoch verzichten, da sich diese Unterschiede aus dem Zusammenhang von selbst verstehen. Zu den entsprechenden Isometrien verweisen wir den Leser auf die Sätze B.1-B.3, die der Vollständigkeit halber im Anhang B notiert und bewiesen wurden. ■

Satz 6.1 *Seien die Bedingungen (6.8)–(6.10) erfüllt und sei $g \in L^2(Q;\mathbb{R}^N)$ mit $\dfrac{\partial g}{\partial t} \in L^2(Q;\mathbb{R}^N)$. Außerdem nehmen wir an, daß $\mu > \dfrac{q}{3q-2}$. Ist $u \in V_q^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung von (6.7), so gilt für beliebige $\Omega' \subset\subset \Omega$ und $0 < t_0 < t_1 < T$*

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(\Omega' \times (t_0,t_1);\mathbb{R}^N). \tag{6.25}$$

Das folgende Lemma dient als Vorbereitung für den Beweis von Satz 6.1.

Lemma 6.3 *Für jedes $p \in (1, +\infty)$ besitzt $X = \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega; \mathbb{C}^N)$ die Eigenschaft $(\mathfrak{R})_p$ bezüglich des Hilbert-Raumes $H = L^2(\Omega; \mathbb{C}^N)$ gemäß der Definition 5.1. Insbesondere gibt es eine Konstante c_X derart, daß*

$$(6.26) \qquad \|\mathfrak{R}_X \varphi\|_{L^p(\mathbb{R};X)} \le c_X \, \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R};X)} \quad \forall\, \varphi \in L^p(\mathbb{R}; X).$$

Beweis. - 1° Sei $p \in (1, +\infty)$. Wir setzen $Y := L^p(\Omega; \mathbb{C}^N)$. Weiterhin definieren wir $M := \{\zeta\, \rho \mid \zeta \in \mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{C}^N),\ \rho \in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}; \mathbb{C})\}$ und bezeichnen mit Z, die Menge aller endlichen Linearkombinationen von Elementen aus M. Dann liegt die Menge Z dicht in $L^p(\mathbb{R}; Y)$. In der Tat, sei f ein stetiges lineares Funktional auf $L^p(\mathbb{R}; Y)$, so daß

$$(6.27) \qquad \langle f, \varphi \rangle = 0 \qquad \forall\, \varphi \in Z.$$

Nach dem Rieszschen Darstellungssatz können wir f mit einem Element aus $L^{p'}(\mathbb{R}; Y')$ identifizieren, welches wir ebenfalls mit f bezeichnen. Sei $\{\zeta_1, \zeta_2, \ldots,\}$ die abzählbare Menge aller auf $\overline{\Omega}$ definierten Polynome mit rationalen Koeffizienten und Werten in $\mathbb{C}^N$. Mit Hilfe des Satzes von Weierstraß zeigt man, daß diese Menge in $L^p(\Omega; \mathbb{C}^N)$ dicht ist. Aus (6.27) folgt dann für alle $m \in \mathbb{N}$

$$(6.28) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \langle f(t), \rho(t)\, \zeta_m \rangle \, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \langle f(t), \zeta_m \rangle \rho(t) \, \mathrm{d}t = 0 \\ \forall\, \rho \in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Hieraus folgt mit Hilfe des Fundamentallemmas

$$(6.29) \qquad \langle f(t), \zeta_m \rangle = 0 \qquad \text{ffa. } t \in \mathbb{R} \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

Wir bemerken, daß die Menge vom Maß Null, derjenigen $t \in \mathbb{R}$, für die (6.29) ausgeschlossen wird, unabhängig von $m \in \mathbb{N}$ gewählt werden kann. Benutzt man das oben erwähnte Dichtheitsargument, so impliziert (6.29)

$$\langle f(t), \zeta \rangle = 0 \qquad \text{ffa. } t \in \mathbb{R}, \quad \forall\, \zeta \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^N).$$

Hieraus schließt man sofort $f(t) = 0$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$, also $f \equiv 0$. Nach dem Satz von Hahn und Banach ist somit klar, daß Z eine dichte Teilmenge von $L^p(\mathbb{R}; Y)$ bildet.

2° Sei $\varphi = \sum_{j=1}^{m} \zeta_j\, \rho_j$ ($\zeta_j \in C^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{C}^N)$, $\rho_j \in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}; \mathbb{C}); j = 1, \ldots, m$) beliebig gegeben. Offensichtlich gehöhrt φ zu Z. Mit einer elementaren Rechnung findet man leicht

$$(6.30) \qquad (\mathfrak{R}_Y \varphi)(x, \cdot) = \mathfrak{R}_{\mathbb{C}}(\varphi(x, \cdot)) \qquad \forall\, x \in \Omega. \text{ }^{1)}$$

Es ist bekannt, daß die Hilbert-Transformation $\mathfrak{R}_{\mathbb{C}}$ den Raum $L^p(\mathbb{R};\mathbb{C})$ homöomorph auf sich selbst abbildet. Insbesondere gibt es eine Konstante C_p, so daß

$$\|\mathfrak{R}_{\mathbb{C}}\eta\|_{L^p(\mathbb{R};\mathbb{C})} \le C_p\|\eta\|_{L^p(\mathbb{R};\mathbb{C})} \quad \forall\, \eta \in L^p(\mathbb{R};\mathbb{C}). \tag{6.31}$$

(siehe in E. M. Stein [Stein (1970)]). Wendet man (6.31) auf die Funktion $\varphi(x,\cdot)\,(x \in \Omega)$ an, so folgt zusammen mit (6.30).

$$\int_{\mathbb{R}} |(\mathfrak{R}_Y\varphi)(x,\cdot)|^p \,\mathrm{d}t \le C_p^p \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x,\cdot)|^p \,\mathrm{d}t \qquad \forall\, x \in \Omega.$$

Nun integrieren wir über Ω und wenden den Satz von Fubini an. Dies ergibt

$$\|\mathfrak{R}_Y\varphi\|_{L^p(\mathbb{R};Y)} \le C_p\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R};Y)} \quad \forall\, \varphi \in Z.$$

Berücksichtigt man schließlich die in 1° bewiesen Dichtheitsaussage, so kann $\mathfrak{R}_Y$ zu einem linearen Isomorphismus auf $L^p(\mathbb{R};Y)$ fortgesetzt werden, so daß

$$\|\mathfrak{R}_Y\varphi\|_{L^p(\mathbb{R};Y)} \le C_p\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R};Y)} \quad \forall\, \varphi \in L^p(\mathbb{R};Y). \tag{6.32}$$

3° Weiterhin definieren wir $V := \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega;\mathbb{C}^N)$. Benutzt man die Aussage (5.15) von Lemma 5.3, so ist ersichtlich, daß wegen $D_\alpha \in \mathcal{L}(V,H)$ $(\alpha \in \{1,\dots,n\})$ gilt:

$$D_\alpha(\mathfrak{R}_X\varphi) = \mathfrak{R}_Y(D_\alpha\varphi) \quad \forall\, \varphi \in L^2(\mathbb{R};V) \cap L^p(\mathbb{R};X),$$

weshalb wir unter Verwendung von (6.32) schließen, daß

$$\|D_\alpha(\mathfrak{R}_X\varphi)\|_{L^p(\mathbb{R};Y)} \le C_p\|D_\alpha\varphi\|_{L^p(\mathbb{R};Y)} \quad \forall\, \varphi \in L^2(\mathbb{R};V) \cap L^p(\mathbb{R};X).$$ [2)]

Wegen der dichten Einbettung $L^2(\mathbb{R};V) \cap L^p(\mathbb{R};X) \subset L^p(\mathbb{R};X)$ können wir $\mathfrak{R}_X$ auf den ganzen Raum $L^p(\mathbb{R};X)$ fortsetzen und erhalten

$$\|\mathfrak{R}_X\varphi\|_{L^p(\mathbb{R};X)} \le C_p\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R};X)} \quad \forall\, \varphi \in L^p(\mathbb{R};X),$$

was zu beweisen war. ■

[1)] Diese Aussage folgt sofort aus der Definition der Hilbert-Transformation und der Tatsache, daß $\mathcal{F}(\varphi(x,\cdot)) = (\mathcal{F}\varphi)(x,\cdot)\ \forall\, x \in \Omega$.

[2)] Man beachte: $\|\varphi\|^p_{L^p(\mathbb{R};X)} = \|\varphi\|^p_{L^p(\mathbb{R};Y)} + \sum\limits_{\alpha=1}^{n} \|D_\alpha\varphi\|^p_{L^p(\mathbb{R};Y)}$.

Beweis von Satz 6.1 - Seien $\Omega' \subset\subset \Omega$, $0 < t_0' < t_0 < t_1 < t_1' < T$ beliebig, aber fixiert. Sei $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$ eine Schnittfunktion, so daß $\zeta \equiv 1$ auf Ω' und $0 \le \zeta \le 1$ in Ω. Ferner sei $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, so daß $0 \le \rho \le 1$ in $\mathbb{R}$, $\rho \equiv 0$ in $\mathbb{R} \setminus (t_0', t_1')$ und $\rho \equiv 1$ auf (t_0, t_1). Wir setzen

$$v^i(x,t) := \begin{cases} u^i(x,t)\zeta(x)\rho(t) & \text{für } \{x,t\} \in \Omega \times (t_0', t_1') \\ 0 & \text{für } \{x,t\} \in \Omega \times (\mathbb{R} \setminus (t_0', t_1')), \end{cases}$$

$$w^i(x,t) := \begin{cases} u^i(x,t)\zeta(x)\rho'(t) & \text{für } \{x,t\} \in \Omega \times (t_0', t_1') \\ 0 & \text{für } \{x,t\} \in \Omega \times (\mathbb{R} \setminus (t_0', t_1')), \end{cases}$$

$$\overline{A}_i^\alpha(x,t) := \begin{cases} A_i^\alpha(x,t,\nabla u(x,t))\zeta(x)\rho(t) & \text{für } \{x,t\} \in \Omega \times (t_0', t_1') \\ 0 & \text{für } \{x,t\} \in \Omega \times (\mathbb{R} \setminus (t_0', t_1')), \end{cases}$$

$$\overline{g}_i(x,t) := \begin{cases} (-A_i^\alpha(x,t,\nabla u(x,t))D_\alpha\zeta(x) + g_i(x,t))\rho(t) & \text{für } \{x,t\} \in \Omega \times (t_0', t_1') \\ 0 & \text{für } \{x,t\} \in \Omega \times (\mathbb{R} \setminus (t_0', t_1')) \end{cases}$$

$(\alpha = 1, \dots, n; i = 1, \dots, N)$.

Geht man analog wie in [Naumann et al. (1998)] vor, so folgt

$$(6.33) \qquad \begin{cases} -\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_\Omega v^i \frac{\partial \varphi^i}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}}\int_\Omega \overline{A}_i^\alpha D_\alpha \varphi^i\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}}\int_\Omega (w^i + \overline{g}_i)\varphi^i\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ \forall\, \varphi \in W_2^{1,1}(\Omega \times \mathbb{R}; \mathbb{C}^N),\ \operatorname{supp}(\varphi) \subset\subset \Omega \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

Als nächstes setzen wir

$$\begin{aligned} H &:= L^2(\Omega; \mathbb{C}^N), \\ X &:= \overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega; \mathbb{C}^N), \\ \langle F(t), \psi\rangle &:= -\int_\Omega \overline{A}_i^\alpha(\cdot,t) D_\alpha \psi^i\,\mathrm{d}x \quad (\psi \in X; t \in \mathbb{R}), \\ (G(t), \psi)_H &:= \int_\Omega (w^i + \overline{g}^i)(\cdot,t)\psi^i\,\mathrm{d}x \quad (\psi \in H; t \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

und indem man $\mathbb{R}^N$ kanonisch in $\mathbb{C}^N$ einbettet, schließt man aus (6.33)

$$(6.34) \qquad \begin{cases} -\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (v(t), \varphi'(t))_H\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \langle F(t), \varphi(t)\rangle\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} (G(t), \varphi(t))_H\,\mathrm{d}t \\ \forall\, \varphi \in L^q(\mathbb{R}; X) \cap L^2(\mathbb{R}; H),\ \varphi' \in L^2(\mathbb{R}; H),\ \operatorname{supp}(\varphi) \subset\subset \mathbb{R}. \end{cases}$$

Beachtet man (6.8) und die Differenzenabschätzungen (6.19), (6.20) (vgl. Lemma 6.2) und wendet man die Höldersche Ungleichung an, so folgt für beliebige $h > 0$

$$(6.35)\qquad \int_{\mathbb{R}} \|v(t+h) - v(t)\|_X^q \,\mathrm{d}t \;\le\; c\,h^{q\mu},$$

$$(6.36)\qquad \int_{\mathbb{R}} \|F(t+h) - F(t)\|_{X'}^{q'} \,\mathrm{d}t \;\le\; c\,h^{2\mu}.$$

Wegen (6.26), (6.35) und (6.36) sind alle Voraussetzungen von Satz 5.4 erfüllt. Folglich haben wir $\dfrac{\partial v}{\partial t} \in L^2(\mathbb{R}; H)$. Die Behauptung des Satzes folgt nun unmittelbar aus der Tatsache, daß die Einschränkung von v auf die Menge $\Omega' \times (t_0, t_1)$ mit u fast überall übereinstimmt. ■

6.2 Existenz der zweiten Ortsableitung

In diesem Abschnitt werden wir die Existenz der zweiten Ortsableitungen einer schwachen Lösung des folgenden parabolischen Systems herleiten

$$(6.37)\qquad \frac{\partial u^i}{\partial t} - D_\alpha A_i^\alpha(x,t,\nabla u) \;=\; B_i(x,t,u,\nabla u) \quad \text{in} \quad Q \qquad (i = 1,\dots,N),$$

wobei die Koeffizienten $A_i^\alpha, B_i\,(\alpha = 1,\dots,n; i = 1,\dots,N)$ den folgenden Bedingungen genügen:

$$(6.38)\qquad \begin{cases} t \mapsto A_i^\alpha(x,t,\xi) \quad \textit{ist meßbar auf } (0,T) \quad \forall\,\{x,\xi\} \in \Omega \times \mathbb{R}^{nN}, \\ A_i^\alpha(0,\cdot,0) \in L^\infty(0,T); \end{cases}$$

$$(6.39)\qquad \begin{cases} |A_i^\alpha(x,t,\xi) - A_i^\alpha(y,t,\eta)| \;\le \\ \le\; c_0 \left\{|x-y|(1+|\eta|+|\xi|)^{q-1} \;+\; (1+|\eta|+|\xi|)^{q-2}|\eta-\xi|\right\} \\ \forall\, t \in (0,T), \forall\,\{x,\xi\}, \{y,\eta\} \in \Omega \times \mathbb{R}^{nN} \;\; (c_0 = \mathrm{const}) \end{cases}$$

$(\alpha = 1,\dots,n; i = 1,\dots,N)$. Sei außerdem die Bedingung (6.10) erfüllt.

Für die rechte Seite B_i setzen wir *kontrolliertes Wachstum* voraus, das heißt:

$$(6.40)\qquad \begin{cases} |B_i(x,t,u,\xi)| \;\le\; c_2(1+|u|^{(q-1)(n+2)/n} + |\xi|^{q-1}) \\ \forall\,\{x,t,u,\xi\} \in Q \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN} \quad (c_2 = \mathrm{const} > 0) \end{cases}$$

$(i = 1, \ldots, N)$.

Als nächstes notieren wir einige vorbereitende Aussagen bezüglich der Differenzen bzw. des Differenzenquotienten, die sich elementar beweisen lassen.

1. *Die Differenz*: Sei $v : \Omega \times (a,b) \to \mathbb{R}$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ meßbar. Sei $\Omega' \subset\subset \Omega$ und sei $h \in \mathbb{R}, 0 < |h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Für $\beta \in \{1, \ldots, n\}$ definieren wir die Differenz

$$(\tau_h^{(\beta)} v)(x,t) := v(x + he_\beta, t) - v(x,t) \quad (\{x,t\} \in \Omega' \times (a,b)).$$

Die folgenden Eigenschaften sind gut bekannt und in der Literatur zu finden (siehe zum Beispiel in [Gilbarg and Trudinger (1977)]):

(1) Ist $v \in W_p^{1,0}(\Omega \times (a,b))$ $(p \in [1, +\infty))$, so gilt für jedes beliebige $h \in \mathbb{R},\ 0 < |h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$:

$$\int_a^b \int_{\Omega'} |\tau_h^{(\beta)} v|^p \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \le |h|^p \int_a^b \int_{\Omega} |D_\beta u|^p \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \qquad (\beta \in \{1, \ldots, n\}). \tag{6.41}$$

(2) Sei $v \in L^p(\Omega \times (a,b))$ $(p \in [1, +\infty))$, so daß

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\beta=1}^n \int_a^b \int_{\Omega'} |\tau_h^{(\beta)} v|^p \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \le C_0 \,|h|^p \\ \forall\, h \in \mathbb{R},\ 0 < |h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega) \quad (\Omega' \subset\subset \Omega;\ C_0 = \text{const}), \end{cases}$$

dann ist $v \in W_p^{1,0}(\Omega' \times (a,b))$, und es gilt:

$$\int_a^b \int_{\Omega'} |\nabla v|^p \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \le C_0. \tag{6.42}$$

2. *Der Differenzenquotient*: Sei $v : \Omega \times (a,b) \to \mathbb{R}$ meßbar. Sei $\Omega' \subset\subset \Omega$ und sei $h \in \mathbb{R}, 0 < |h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Dann definieren wir für $\beta \in \{1, \ldots, n\}$ den Differenzenquotienten

$$(\Delta_h^{(\beta)} v)(x,t) := \frac{v(x + he_\beta, t) - v(x,t)}{h} \quad (\{x,t\} \in \Omega' \times (a,b)).$$

(3) Sei $v \in L^p(\Omega \times (a,b))$ $(1 < p < +\infty)$. Es gelte

$$\int_a^b \int_{\Omega'} |\Delta_h^{(\beta)} v|^p \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \le C_0 \quad \forall\, 0 < |h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega).$$

Dann besitzt v eine schwache verallgemeinerte Ableitung $D_\beta v$ in $L^p(\Omega' \times (a,b))$ und unter Berücksichtigung der Reflexivität des Raumes $L^p(\Omega' \times (a,b))$ erhält man

$$\text{(6.43)} \qquad \Delta_h^{(\beta)} v \rightharpoonup D_\beta v \quad \text{in} \quad L^p(\Omega \times (a,b)) \quad \text{für} \quad h \to 0.$$

(4) Sei $v \in L^2(\Omega \times (a,b))$, so daß für ein $\beta \in \{1, \dots, n\}$:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t \in (a,b)} \int_{\Omega'} |(\Delta_h^{(\beta)} v)(\cdot, t)|^2 \, \mathrm{d}x \le C_0 \quad \forall\, 0 < |h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega),$$

wobei $C_0 = \text{const}$ nicht von h abhängt. Dann gilt:

$$\text{(6.44)} \qquad \operatorname*{ess\,sup}_{t \in (a,b)} \int_{\Omega'} |D_\beta v(\cdot, t)|^2 \, \mathrm{d}x \le C_0.$$

In der Tat, aus der Voraussetzung folgt für alle $p > 1$

$$\int_a^b \left(\int_{\Omega'} |(\Delta_h^{(\beta)} v)(x,t)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{p/2} \mathrm{d}t \le C_0^{p/2} \quad \forall\, 0 < |h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega).$$

Da der Raum $L^p(a,b;L^2(\Omega'))$ reflexiv ist, existieren eine Folge (h_j) positiver Zahlen mit $\lim\limits_{j \to \infty} h_j = 0$ und eine Funktion $w \in L^p(a,b;L^2(\Omega'))$, so daß

$$\Delta_{h_j}^{(\beta)} v \rightharpoonup w \quad \text{in} \quad L^p(a,b;L^2(\Omega')) \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

Benutzt man zusätzlich die Eigenschaft (3), so folgt $w(x,t) = D_\beta v(x,t)$ für fast alle $\{x,t\} \in \Omega' \times (a,b)$. Außerdem liefert die schwache Unterhalbstetigkeit der Norm die Abschätzung:

$$\text{(6.45)} \qquad \int_a^b \left(\int_{\Omega'} |D_\beta v(x,t)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{p/2} \mathrm{d}t \le C_0^{p/2}.$$

Als nächstes setzen wir

$$A_\delta := \left\{ t \in (a,b) \,\middle|\, \int_{\Omega'} |D_\beta v(\cdot,t)|^2 \, \mathrm{d}x \ge C_0 + \delta \right\} \quad (\delta > 0)$$

und folgern aus (6.45)

$$\operatorname{mes}(A_\delta)(C_0 + \delta)^{p/2} \le \int_a^b \left(\int_{\Omega'} |D_\beta v(x,t)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{p/2} \mathrm{d}t \le C_0^{p/2}$$

für alle $p > 1$, was zeigt, daß $\operatorname{mes}(A_\delta) = 0$ für alle $\delta > 0$. Die Ungleichung (6.44) folgt nun unmittelbar aus der Definition des wesentlichen Supremums. ■

Unter Benutzung der sogenannten Methode des Differenzenquotienten erhält man ähnlich wie in Naumann, Wolf [Naumann and Wolf (1992)] den

Satz 6.2 *Seien die Bedingungen* (6.10), (6.38)−(6.40) *erfüllt. Sei* $u \in V_q^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N)$ *eine schwache Lösung des Systems* (6.37), *wobei*

(6.46) $$\frac{2n}{n+2} < q < 2.$$

Dann gilt für beliebige $\Omega' \subset\subset \Omega$ *und* $t_0 \in (0,T)$:

(6.47) $$D^2u \in L^q(\Omega' \times (t_0,T);\mathbb{R}^{n^2N}).$$ [3)]

Außerdem haben wir

(6.48) $$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0,T)} \int_{\Omega'} |\nabla u(\cdot,t)|^2\,\mathrm{d}x \;+\; \int_{t_0}^{T}\int_{\Omega'} (1+|\nabla u|)^{q-2}|D^2u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;<\; +\infty.$$

Beweis. - Seien $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$ beliebig, aber fixiert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $\Omega'' \in \mathcal{C}^{0,1}$.

Seien $0 < t_0 < t_1 < T$ fixiert. Ähnlich wie in [Naumann and Wolff, M. (1994)] erhält man unter Verwendung des Steklov-Mittels die folgende Lokalisierung der schwachen Formulierung:

(6.49) $$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega''} \frac{\partial u^i_\lambda}{\partial t}(x,t)\psi^i(x)\,\mathrm{d}x \;+\; \int_{\Omega''} (A_i^\alpha)_\lambda(x,t)D_\alpha\psi^i(x)\,\mathrm{d}x \;= \\ \quad = \displaystyle\int_{\Omega''} (B_i)_\lambda(x,t)\psi^i(x)\,\mathrm{d}x \\ \text{ffa. } 0<t<t_1,\; 0<\lambda<T-t_1,\; \forall\,\psi \in \overset{\circ}{W}{}^1_q(\Omega'';\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

(Wir bemerken, daß die Menge vom Maß Null derjenigen t, für die diese Identität nicht gilt, unabhängig von λ gewählt werden kann.)

Sei $\zeta \in C_c^\infty(\Omega'')$ eine Schnittfunktion mit $0 \le \zeta \le 1$ in Ω'' und $\zeta \equiv 1$ auf Ω'. Seien $t_1 - t_0 \le \tau_1 < \tau_2 \le t_1$ beliebig, aber fixiert. Sei $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ nichtfallend, so daß $\rho \equiv 0$ auf $(-\infty, t_1-\tau_2]$, $\rho \equiv 1$ auf $[t_1-\tau_1,+\infty)$ und $0 \le \zeta \le 1$, $0 \le \rho' \le 2(\tau_2-\tau_1)^{-1}$ in $\mathbb{R}$. Sei $\beta \in \{1,\dots,n\}$ und sei $0 < |h| < \operatorname{dist}(\Omega'',\partial\Omega)$. Nun setzen wir für fast alle $t \in (0,t_1)$ die zulässige Testfunktion

$$\psi^i(x) \;:=\; (\tau^{(\beta)}_{-h}\zeta^2(\cdot)\tau^{(\beta)}_h u^i_\lambda)(x,t)\rho(t) \quad (x \in \Omega'';\, i=1,\dots,N)$$

---

3) Hier ist $D^2u = \{D_\alpha D_\beta u^i\}^{i=1,\dots,N}_{\alpha,\beta=1,\dots,n}$ (= die Matrix der zweiten Ableitungen).

$(0 < \lambda < T - t_1)$ in (6.49) ein, integrieren über das Intervall $(0, s)$ $(s \in (0, t_1))$, machen von der Transformationsformel Gebrauch, benutzen partielle Integration und führen den Grenzübergang $\lambda \to 0$ aus. Hieraus ergibt sich für fast alle $s \in (0, t_1)$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |(\tau_h^{(\beta)}u)(\cdot,s)|^2\zeta^2\,\mathrm{d}x\rho(s) \;+\; \int_0^s\int_\Omega (\tau_h^{(\beta)}A_i^\alpha)(\tau_h^{(\beta)}D_\alpha u^i)\zeta^2\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;=$$

$$\leq\; -2\int_0^s\int_\Omega A_i^\alpha(\tau_{-h}^{(\beta)}(D_\alpha\zeta)\zeta\tau_h^{(\beta)}u^i)\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;+\; \int_0^s\int_\Omega B_i(\tau_{-h}^{(\beta)}\zeta^2\tau_h^{(\beta)}u^i)\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \tag{6.50}$$

$$+\int_0^s |\tau_h^{(\beta)}u|^2\zeta^2\rho'\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Beachtet man (6.10), so folgt aus (6.50)

$$\frac{1}{2}\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_1-\tau_1,t_1)}\int_\Omega |(\tau_h^{(\beta)}u)(\cdot,t)|^2\zeta^2\,\mathrm{d}x +$$

$$+\,\nu_0\int_{t_1-\tau_1}^{t_1}\int_\Omega (1+|\nabla u(x+he_\beta,t)|+|\nabla u(x,t)|)^{q-2}|\tau_h^{(\beta)}\nabla u|^2\zeta^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\leq$$

$$\leq\; -2\int_{t_1-\tau_2}^{t_1}\int_\Omega |A_i^\alpha(\tau_{-h}^{(\beta)}(D_\alpha\zeta)\zeta\tau_h^{(\beta)}u^i)|\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \tag{6.51}$$

$$+\int_{t_1-\tau_2}^{t_1}\int_\Omega |B_i(\tau_{-h}^{(\beta)}\zeta^2\tau_h^{(\beta)}u^i)|\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t +$$

$$+\int_{t_1-\tau_2}^{t_1}\int_\Omega |\tau_h^{(\beta)}u|^2\zeta^2\rho'\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;=$$

$$=\; I_1 + I_2 + I_3.$$

(i) Wir beginnen mit der Abschätzung des Integrals I_1. Hierfür verwenden wir die Höldersche Ungleichung und die Eigenschaft (1) (vgl. (6.41)). Hiermit schließt man:

$$I_1 \;\leq\; c\,|h|\left(\int_Q |A_i^\alpha|^{q'}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/q'} \times$$

$$\times\left(\int_{t_1-\tau_2}^{t_1}\int_\Omega |((D_\beta\zeta)D_\alpha\zeta + (D_\beta D_\alpha\zeta)\zeta)\tau_h^{(\beta)}u \;+\; (D_\alpha\zeta)\zeta\tau_h^{(\beta)}D_\beta u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/q}.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung schätzen wir mit Hilfe von (6.38), (6.39) und (6.41) weiter nach oben ab und wenden anschließend die Youngsche Ungleichung an. Hiermit folgt

$$I_1 \le c\,|h|^2(\max|\nabla\zeta|^2 + \max|D^2\zeta|)\left(1 + \int_Q |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right) + \\ + \frac{\nu_0}{6}\int_{t_1-\tau_2}^{t_1}\int_\Omega (1+|\nabla u(x+he_\beta,t)| + |\nabla u(x,t)|)^{q-2}|\tau_h^{(\beta)}\nabla u|^2\zeta^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

(ii) Beachtet man (6.40), so ergibt sich mit einer ähnlichen Argumentation, die für die Abschätzung von I_1 benutzt wurde, die folgende Ungleichung:

$$I_2 \le c\,|h|^2(\max|\nabla\zeta|)\left(\int_Q (1+|u|^{q(n+2)/n} + |\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right) + \\ + \frac{\nu_0}{6}\int_{t_1-\tau_2}^{t_1}\int_\Omega (1+|\nabla u(x+he_\beta,t)| + |\nabla u(x,t)|)^{q-2}|\tau_h^{(\beta)}\nabla u|^2\zeta^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

(iii) Unter Verwendung von Lemma A.1 (mit $p_0 = q(n+2)/n$ und $p_1 = q$) und der Eigenschaft (1) (vgl. (6.41)) bekommt man

$$I_3 \le c\,|h|^{2\theta}(\tau_2-\tau_1)^{-1}\|(\tau_h^{(\beta)}u)\zeta\|^{2(1-\theta)}_{L^{q(n+2)/n}(\Omega\times(t_1-\tau_2,\tau_2);\mathbb{R}^N)}\|\nabla u\|^{2\theta}_{L^q(Q;\mathbb{R}^{nN})},$$

wobei

$$\theta = \frac{n+2}{4}\left(q - \frac{2n}{n+2}\right).$$

Nun wenden wir (6.5) (vgl. Anmerkung 6.1, (ii)) an und folgern unter Verwendung der Poincaré-Ungleichung, der Eigenschaft (1) (vgl. (6.41)) und Anwendung der Hölderschen sowie der Youngschen Ungleichung:

$$I_3 \le \frac{c\,|h|^{2\theta}}{\tau_2-\tau_1}\left(\|(\tau_h^\beta u)\zeta\|_{L^\infty(t_1-\tau_2,t_1;L^2(\Omega;\mathbb{R}^N))} + \|(\tau_h^\beta u)\zeta\|_{L^q(t_1-\tau_2,t_1;L^{q^*}(\Omega;\mathbb{R}^N))}\right)^{2(1-\theta)} \times \\ \times \left(\int_Q (1+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{2\theta/q} \le$$

$$\le \frac{c\,|h|^{2\theta}}{\tau_2-\tau_1}\Bigg(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_1-\tau_2,t_1)}\int_\Omega |(\tau_h^\beta u)(\cdot,t)|^2\zeta^2\,\mathrm{d}x +$$

$$+\ \nu_0\int_{t_1-\tau_2}^{t_1}\int_\Omega (1+|\nabla u(x+he_\beta,t)|+|\nabla u(x,t)|)^{q-2}|\tau_h^\beta\nabla u|^2\zeta^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Bigg)^{1-\theta}\times$$

$$\times\left(\int_Q (1+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\right)^{2/q-1+\theta} + \frac{c\,|h|^2}{\tau_2-\tau_1}\int_Q(1+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\ \le$$

$$\le\ \frac{c\,|h|^2}{(\tau_2-\tau_1)^{1/\theta}}\left(\int_Q(1+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{(2-q)/q\theta+1} +$$

$$+\ \frac{1}{4}\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_1-\tau_2,t_1)}\int_\Omega |(\tau_h^{(\beta)}u)(x,\cdot)|^2\zeta^2\,\mathrm{d}x +$$

$$+\ \frac{\nu_0}{6}\int_{t_1-\tau_2}^{t_1}\int_\Omega (1+|\nabla u(x+he_\beta,t)|+|\nabla u(x,t)|)^{q-2}|\tau_h^{(\beta)}\nabla u|^2\zeta^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Nach Einsetzen der soeben erhaltenen Abschätzungen für I_1, I_2 und I_3 in (6.51) ergibt sich für beliebige $t_1-t_0\le\tau_1<\tau_2\le t_1$

$$\frac{1}{2}\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_1-\tau_1,t_1)}\int_\Omega |(\tau_h^{(\beta)}u)(\cdot,t)|^2\zeta^2\,\mathrm{d}x +$$

$$+\nu_0\int_{t_1-\tau_1}^{t_1}\int_\Omega (1+|\nabla u(x+he_\beta,t)|+|\nabla u(x,t)|)^{q-2}|\tau_h^{(\beta)}\nabla u|^2\zeta^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\ \le$$

$$\le\ \frac{c\,|h|^2}{(\tau_2-\tau_1)^{1/\theta}}\left(\int_Q(1+|u|^{q(n+2)/n}+|\nabla u|)^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{(2-q)/q\theta+1} +$$

$$+\frac{1}{4}\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_1-\tau_2,t_1)}\int_\Omega |(\tau_h^{(\beta)}u)(\cdot,t)|^2\zeta^2\,\mathrm{d}x +$$

$$+\frac{\nu_0}{2}\int_{t_1-\tau_2}^{t_1}\int_\Omega (1+|\nabla u(x+he_\beta,t)|+|\nabla u(x,t)|)^{q-2}|\tau_h^{(\beta)}\nabla u|^2\zeta^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

wobei $c=\text{const}$ weder von h noch von τ_1 und τ_2 abhängt. Nach Anwendung des technischen Lemmas A.3 folgt hieraus

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0,t_1)}\int_{\Omega'} |(\tau_h^{(\beta)}u)(\cdot,t)|^2\,\mathrm{d}x +$$

$$+\ \nu_0\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega'} (1+|\nabla u(x+he_\beta,t)|+|\nabla u(x,t)|)^{q-2}|\tau_h^{(\beta)}\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\ \le \tag{6.52}$$

$$\le\ c\,|h|^2 t_0^{-1/\theta}\left(\int_Q(1+|u|^{q(n+2)/n}+|\nabla u|)^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{(2-q)/q\theta+1}.$$

Da die Konstante c der obigen Abschätzung nicht von $t_1 \in (0,T)$ abhängt, kann man wegen der Absolutstetigkeit des Lebesgue-Integrals dort den Grenzübergang $t_1 \to T$ durchführen und erhält schließlich mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung

$$\int_{t_0}^{T}\int_{\Omega'} |\tau_h^{(\beta)}\nabla u|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le\; c\,|h|^q \quad \forall\, h \in \mathbb{R},\ 0 < |h| < \operatorname{dist}(\Omega'', \partial\Omega) \tag{6.53}$$

$(\beta = 1,\dots,n)$, wobei $c = \text{const}$ nur von $c_0/\nu_0, c_2, q, n$ und N abhängt. Die erste Aussage ergibt sich nun unmittelbar aus der Eigenschaft (2) (vgl. (6.42)).

Wir kommen nun zum Beweis der zweiten Aussage. Seien $\alpha, \beta \in \{1,\dots,n\}$ fixiert. Wegen (6.53) sind wir in der Lage, die Eigenschaft (3) (vgl. (6.43)) anzuwenden. Hiermit ergibt sich

$$\Delta_h^{(\beta)} D_\alpha u \rightharpoonup D_\beta D_\alpha u \quad \text{in} \quad L^q(\Omega' \times (t_0,T); \mathbb{R}^N) \quad \text{für} \quad h \to 0.$$

Als nächstes setzen wir für $0 < h < \operatorname{dist}(\Omega'', \partial\Omega)$

$$V_h(x,t) := (1 + |\nabla u(x + he_\beta, t)| + |\nabla u(x,t)|)^{(q-2)/2} \quad (\{x,t\} \in \Omega' \times (t_0,T)).$$

Unmittelbar aus (6.52) folgt, daß die Menge $\{V_h \Delta_h^{(\beta)} D_\alpha u \,|\, 0 < h < \operatorname{dist}(\Omega'', \partial\Omega)\}$ in $L^2(\Omega' \times (t_0,T); \mathbb{R}^N)$ beschränkt ist. Da der Raum $L^2(\Omega' \times (t_0,T); \mathbb{R}^N)$ reflexiv ist, existiert eine Folge (h_j) positiver Zahlen mit $\lim\limits_{j\to\infty} h_j = 0$ und eine Funktion $f \in L^2(\Omega' \times (t_0,T); \mathbb{R}^N)$, so daß

$$V_{h_j} \Delta_{h_j}^{(\beta)} D_\alpha u \rightharpoonup f \quad \text{in} \quad L^q(\Omega' \times (t_0,T); \mathbb{R}^N) \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

Weiterhin liefert die Stetigkeit im Mittel

$$V_{h_j} \to (1 + 2|\nabla u|)^{(q-2)/2} \quad \text{in} \quad L^{q'}(\Omega' \times (t_0,T)) \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

Sei nun $\varphi \in C_c^\infty(\Omega' \times (t_0,T))$ beliebig gewählt. Unter Verwendung der Dreiecksungleichung und der soebenen hergeleiteten Konvergenzeigenschaften findet man

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{T}\int_{\Omega'} \varphi (1 + 2|\nabla u|)^{(q-2)/2} D_\beta D_\alpha u \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;&=\; \lim_{j\to\infty} \int_{t_0}^{T}\int_{\Omega'} \varphi V_{h_j} \Delta_{h_j}^{(\beta)} D_\alpha u \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;= \\ &=\; \int_{t_0}^{T}\int_{\Omega'} \varphi f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Aus dieser Identität schließt man

$$(1 + 2|\nabla u(x,t)|)^{(q-2)/2} D_\beta D_\alpha u(x,t) \;=\; f(x,t) \quad \text{ffa. } \{x,t\} \in \Omega' \times (t_0,T),$$

also

$$\int_{t_0}^{T} \int_{\Omega'} (1 + 2|\nabla u(x,t)|)^{q-2} |D_\alpha D_\beta u|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t < +\infty \quad (\alpha, \beta \in \{1, \ldots, n\}).$$

Darüber hinaus folgt aus (6.52) mit Hilfe der Eigenschaft (4)

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t \in (t_0, T)} \int_{\Omega'} |D_\beta u(\cdot, t)|^2 \,\mathrm{d}x < +\infty \quad (\beta \in \{1, \ldots, n\}).$$

Somit ist der Beweis des Satzes vollständig erbracht. ■

6.3 $H^{1/2}$-Differenzierbarkeit

In den nachfolgenden Betrachtungen zeigen wir, daß unter geeigneten Voraussetzungen eine schwache Lösung u eines parabolischen Systems zu $H^{1/2}(t_0, t_1; L^2(\Omega'; \mathbb{R}^N))$ $(0 < t_0 < t_1 < T, \Omega' \subset\subset \Omega)$ gehört. Hierbei betrachten wir das folgende parabolische System partieller Differentialgleichungen:

$$\text{(6.54)} \qquad \frac{\partial u^i}{\partial t} - D_\alpha A_i^\alpha(x, t, u, \nabla u) = g_i \quad \text{in} \quad Q \qquad (i = 1, \ldots, N),$$

wobei $A_i^\alpha : Q \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}$ $(\alpha = 1, \ldots, n; i = 1, \ldots, N)$ Carathéodory-Funktionen bezeichnen, die den folgenden Bedingungen genügen:

$$\text{(6.55)} \qquad \begin{cases} |A_i^\alpha(x, t, u, \xi)| \le c_0 \, (1 + |u| + |\xi|)^{q-1} \\ \forall \, \{x, t, u, \xi\} \in Q \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN} \ \ (c_0 = \text{const}) \end{cases}$$

$(\alpha = 1, \ldots, n; i = 1, \ldots, N)$;

$$\text{(6.56)} \qquad g \in L^2(Q; \mathbb{R}^N).$$

Analog wie in Abschnitt 6.1 definieren wir schwache Lösungen von (6.54) auf folgende Weise:

Definition 6.2 *Seien (6.55) und (6.56) erfüllt. Dann heißt $u \in V_q^{1,0}(Q; \mathbb{R}^N)$ schwache Lösung von (6.54), falls für beliebige $\varphi \in C_c^1(Q; \mathbb{R}^N)$ gilt:*

$$\text{(6.57)} \qquad -\int_Q u^i \frac{\partial \varphi^i}{\partial t} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_Q A_i^\alpha(x, t, u, \nabla u) D_\alpha \varphi^i \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_Q g_i \varphi^i \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \qquad ■$$

Wir haben nun das folgende

Lemma 6.4 *Seien* (6.55) *und* (6.56) *erfüllt. Sei* $u \in V_q^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N)$ *eine schwache Lösung von* (6.54). *Dann gilt*:

$$u \in H^{1/2}(t_0, T; L^2(\Omega';\mathbb{R}^N)) \tag{6.58}$$

für alle $0 < t_0 < T$ *und für beliebige offene Teilmengen* $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Beweis. - Seien $\Omega' \subset\subset \Omega$, $0 < t_0' < t_0 < T$ beliebig, aber fixiert. Sei $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$ eine Schnittfunftion mit $0 \le \zeta \le 1$ in Ω und $\zeta \equiv 1$ in Ω'. Ferner sei $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, so daß $0 \le \rho \le 1$ in $\mathbb{R}$, $\rho \equiv 0$ in $(-\infty, t_0')$ und $\rho \equiv 1$ auf (t_0, T). Wir setzen

$$w^i(x,t) := \begin{cases} u^i(x,t)\zeta(x)\rho'(t) \;+\; A_i^\alpha(x,t,\nabla u(x,t))(D_\alpha\zeta)(x)\rho(t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } \{x,t\} \in \Omega \times (t_0', T) \\ u^i(x, 2T-t)\zeta(x)\rho'(2T-t) + \\ \qquad + A_i^\alpha(x, 2T-t, \nabla u(x,2T-t))(D_\alpha\zeta)(x)\rho(2T-t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } \{x,t\} \in \Omega \times (T, 2T-t_0') \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; \text{für } \{x,t\} \in \Omega \times (\mathbb{R} \setminus (t_0', 2T-t_0')), \end{cases}$$

$$v^i(x,t) := \begin{cases} u^i(x,t)\zeta(x)\rho(t) & \text{für } \{x,t\} \in \Omega \times (t_0', T) \\ u^i(x,2T-t)\zeta(x)\rho(2T-t) & \text{für } \{x,t\} \in \Omega \times (T, 2T-t_0') \\ 0 & \text{für } \{x,t\} \in \Omega \times (\mathbb{R} \setminus (t_0', 2T-t_0')), \end{cases}$$

$$\overline{A}_i^\alpha(x,t) := \begin{cases} A_i^\alpha(x,t)\zeta(x)\rho(t) & \text{für } \{x,t\} \in \Omega \times (t_0', T) \\ -A_i^\alpha(x,2T-t)\zeta(x)\rho(2T-t) & \text{für } \{x,t\} \in \Omega \times (T, 2T-t_0') \\ 0 & \text{für } \{x,t\} \in \Omega \times (\mathbb{R} \setminus (t_0', 2T-t_0')), \end{cases}$$

$$\overline{g}_i(x,t) := \begin{cases} g_i(x,t)\zeta(x)\rho(t) & \text{für } \{x,t\} \in \Omega \times (t_0', T) \\ -g_i(x,2T-t)\zeta(x)\rho(2T-t) & \text{für } \{x,t\} \in \Omega \times (T, 2T-t_0') \\ 0 & \text{für } \{x,t\} \in \Omega \times (\mathbb{R} \setminus (t_0', 2T-t_0')). \end{cases}$$

$(\alpha = 1, \dots, n; i = 1, \dots, N)$.

Aus (6.57) folgert man unter Benutzung der Produkt- und Kettenregel:

$$
(6.59)\qquad \begin{cases} -\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_{\Omega} v^i \frac{\partial \varphi^i}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;=\; -\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_{\Omega} \overline{A}_i^{\alpha}(x,t) D_\alpha \varphi^i\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,+ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_{\Omega} \overline{g}_i \varphi^i\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;+\; \int_{\mathbb{R}}\int_{\Omega} w^i \varphi^i\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ \forall\, \varphi \in C^1_{\mathrm{c}}(\Omega\times\mathbb{R};\mathbb{R}^N). \end{cases}
$$

Bettet man $\mathbb{R}^N$ kanonisch in $\mathbb{C}^N$ ein und setzt man

$$
\begin{aligned}
H &:= L^2(\Omega;\mathbb{C}^N),\\
X &:= \overset{\circ}{W}{}^1_q(\Omega;\mathbb{C}^N),\\
\langle F(t),\psi\rangle &:= -\int_{\Omega} \overline{A}_i^{\alpha}(\cdot,t) D_\alpha \psi^i\,\mathrm{d}x \quad (\psi\in X;\ t\in\mathbb{R}),
\end{aligned}
$$

so folgt aus (6.59)

$$
(6.60)\qquad \begin{cases} -\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (v(t),\varphi'(t))_H\,\mathrm{d}t \;=\; \int_{\mathbb{R}} \langle F(t),\varphi(t)\rangle\,\mathrm{d}t \;+\; \int_{\mathbb{R}} (w(t)+\overline{g},\varphi(t))_H\,\mathrm{d}t \\ \forall\,\varphi\in \mathcal{W}_{\mathrm{c}}(0,T).\ ^{4)} \end{cases}
$$

Hiermit bestätigt man $v\in W(\mathbb{R};X,H)$, und nach Satz 5.3 gilt $v\in H^{1/2}(\mathbb{R};H)$. Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus der Tatsache, daß v eingeschränkt auf die Menge $\Omega'\times(t_0,T)$ mit u fast überall übereinstimmt. ■

6.4 Kaplan-Bedingung fast überall

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels beschäftigen wir uns mit der Frage, unter welchen Bedingungen die sogenannte Kaplan-Bedingung (vgl. [Kaplan (1966)]) für schwache Lösungen eines nichtlinearen Systems (6.54) erfüllt ist. Unter Beibehaltung der Bezeichnungen von Abschnitt 6.3 haben wir nun das

Lemma 6.5 *Sei (6.55) erfüllt. Sei $u\in V_q^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung von (6.54) mit $g\in L^p(Q;R^N)$ $(p'\geq q(n+2)/n)$. Dann ist für jede offene Menge $\Omega'\subset\subset\Omega$ die Kaplan-Bedingung*

[4)] Zur Definition der Menge $\mathcal{W}_{\mathrm{c}}(0,T)$ siehe Abschnitt 5.2.

$$\int_t^T \frac{\|u(\cdot,s)-u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega';\mathbb{R}^N)}}{s-t}\,\mathrm{d}s \;<\; +\infty \tag{6.61}$$

für fast alle $t \in (0,T)$ erfüllt.

Beweis. - Sei $\Omega' \subset\subset \Omega$ offen und $0 < t_0 < t_1 < T$ beliebig gewählt. Mit der gleichen Argumentation, die zu (6.17) führte (siehe Lemma 6.1), erhält man für beliebige $0 < h < T - t_1$

$$\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega'} |u(x,t+h)-u(x,t)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le\; C_0,$$

wobei $C_0 = \text{const}$ weder von h noch von t_1 abhängt. Wir integrieren beide Seiten der obigen Ungleichung über das Intervall $(0, T-t_1)$ und benutzen anschließend den Satz von Fubini. Dies impliziert

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^{T-t_1} \frac{\|u(\cdot,t+h)-u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega';\mathbb{R}^N)}}{h}\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}t \;\le\; C_0(T-t_1),$$

also

$$\int_0^{T-t_1} \frac{\|u(\cdot,t+h)-u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega';\mathbb{R}^N)}}{h}\,\mathrm{d}h \;<\; +\infty \tag{6.62}$$

für fast alle $t \in (t_0, t_1)$. Die Behauptung (6.61) folgt nun unmittelbar aus (6.62) unter Verwendung der Substitution $h = s - t$ und Anwendung der Transformationsformel für das Lebesgue-Integral. ∎

Kapitel 7

Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

7.1 Einführung

Wie im elliptischen Fall, so spielen auch bei der Regularitätsuntersuchung schwacher Lösungen parabolischer Systeme die sogenannten *Caccioppoli-Ungleichungen* und *fundamentalen Abschätzungen* eine wesentliche Rolle. Solche Ungleichungen sind bereits bekannt, allerdings nur bezüglich der L^2-Normen (siehe [Campanato (1984)]). Da wir hier jedoch schwache Lösungen aus $W_q^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N)$ $(1 < q < 2)$ entarteter Systeme betrachten, erweist es sich als notwendig, diese Abschätzungen in geeigneter Weise zu verallgemeinern. Wir gehen hierbei ähnlich wie im Abschnitt 1.1 vor.

Wir betrachten das folgende lineare parabolische System partieller Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} - D_\alpha\Big(A^{\alpha\beta}_{ij(*)} D_\beta u^j\Big) = 0 \qquad \text{in} \quad Q \qquad (i = 1, \ldots, N), \tag{7.1}$$

wobei $A^{\alpha\beta}_{ij(*)}$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, n; i, j = 1, \ldots, N)$ konstante Koeffizienten bezeichnen, die den folgenden Bedingungen genügen:

$$A^{\alpha\beta}_{ij(*)} \xi^i_\alpha \xi^j_\beta \geq \nu_0 |\xi|^2 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^{nN} \quad (\nu_0 = \text{const} > 0); \tag{7.2}$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} |A^{\alpha\beta}_{ij(*)}| \leq c_0 \qquad (c_0 = \text{const}). \tag{7.3}$$

Definition 7.1 *Eine Funktion* $u \in V_q^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N)$ $(1 < q < +\infty)$ *heißt* **schwache Lösung** *von* (7.1)*, falls die folgende Integralidentität für alle* $\varphi \in C_c^\infty(Q;\mathbb{R}^N)$ *erfüllt ist*:

$$(7.4)\qquad -\int_Q u^i \frac{\partial \varphi^i}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_Q A^{\alpha\beta}_{ij(*)} D_\beta u^j D_\alpha \varphi^i\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0. \qquad \blacksquare$$

7.2 Verallgemeinerung der Caccioppoli-Ungleichung

Das Ziel dieses Abschnittes ist die Herleitung einer Verallgemeinerung der fundamentalen Abschätzung bezüglich der L^q-Norm $(1 < q < 2)$. Ein wesentliches Hilfsmittel sind hierbei die sogenannten *Caccioppoli-Ungleichungen*, bzw. Verallgemeinerungen solcher Ungleichungen, welche wir im vorliegenden Abschnitt herleiten werden.

Wir beginnen mit einer bekannten Caccioppoli-Ungleichung, bezüglich der L^2-Normen. Dazu das

Lemma 7.1 *Seien $A^{\alpha\beta}_{ij(*)}$ $(\alpha, \beta = 1, \dots, n; i, j = 1, \dots, N)$ konstante Koeffizienten, die den Bedingungen (7.2) und (7.3) genügen. Sei $u \in V_2^{1,0}(Q; \mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung von (7.1). Dann ist u in Q beliebig oft differenzierbar und für beliebige Paare konzentrischer Teilzylinder $Q_\sigma \subset Q_R \subset Q$ gelten die Ungleichungen*

$$(7.5)\qquad \int_{Q_\sigma} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \frac{c'}{(R-\sigma)^2} \int_{Q_R} |u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

$$(7.6)\qquad \int_{Q_\sigma} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \frac{c''}{(R-\sigma)^2} \int_{Q_R} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

wobei $c', c'' = \mathrm{const} > 0$ nur von $c_0/\nu_0, n$ und N abhängen.

Beweis. - 1° Mit der bekannten Methode des Differenzenquotienten läßt sich leicht verifizieren, daß $u \in C^\infty(Q; \mathbb{R}^N)$ (siehe z.B. in [Campanato (1984)]).

2° Seien $X_0 = \{x_0, t_0\} \in Q$ und $0 < \sigma < R < \mathrm{dist}(X_0, \partial Q)$ [1)] beliebig fixiert. Mit $\overline{\sigma}$ bezeichnen wir die Zahl $(\sigma + R)/2$. Unter Verwendung geeigneter Testfunktionen erhalten wir aus (7.4) unter Berücksichtigung von (7.2) und (7.3) die folgenden Caccioppoli-Ungleichungen:

$$(7.7)\qquad \int_{Q_\sigma} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \frac{c}{(R-\sigma)^2} \int_{Q_R} |u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

$$(7.8)\qquad \int_{Q_{\overline{\sigma}}} \left|\frac{\partial}{\partial t}\nabla u\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \frac{c}{(R-\sigma)^2} \int_{Q_R} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

[1)] Hier ist $\mathrm{dist}(X_0, \partial Q)$ der Abstand des Punktes X_0 zu ∂Q bezüglich der parabolischen Metrik $d(X_1, X_2) := \max\{|x_1 - x_2|, |t_1 - t_2|^{1/2}\}$ $(X_1 = \{x_1, t_1\}, X_2 = \{x_2, t_2\} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$.

Mit einer geeigneten Schnittfunktion $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ liefert die Identität (7.4) nach Einsetzen der Testfunktion $\dfrac{\partial u}{\partial t}\zeta^2$:

$$\int_{Q_\sigma} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le\; c\Big(\int_{Q_R} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2}\Big(\int_{Q_{\overline{\sigma}}} \left|\frac{\partial}{\partial t}\nabla u\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2} +$$

$$+\frac{c}{R-\sigma}\Big(\int_{Q_R} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2}\Big(\int_{Q_R} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2}.$$

Kombiniert man diese Ungleichung mit (7.8), und wendet man anschließend die Youngsche Ungleichung an, so ergibt sich

$$\int_{Q_\sigma} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le\; +\frac{c}{(R-\sigma)^2}\int_{Q_R} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{Q_R} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{7.9}$$

Aus (7.9) folgern wir unter Benutzung von Lemma A.3 die Ungleichung

$$\int_{Q_\sigma} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le\; \frac{c}{(R-\sigma)^2}\int_{Q_R} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \tag{7.10}$$

für beliebige Paare konzentrischer Zylinder $Q_\sigma \subset Q_R \subset Q$, womit der Beweis des Lemmas vollständig erbracht ist. ∎

Auf der Grundlage von (7.5) und (7.6) ist es nun möglich, eine entprechende Verallgemeinerung der Caccioppoli-Ungleichung bezüglich der L^q-Norm ($1 < q < 2$) herzuleiten. Dazu der

Satz 7.1 *Seien $A^{\alpha\beta}_{ij(*)}$ konstante Koeffizienten, die den Bedingungen (7.2) und (7.3) genügen. Dann existiert eine positive Konstante $c = c(c_0/\nu_0, n, N, q)$ derart, daß für jede schwache Lösung $u \in V^{1,0}_q(Q;\mathbb{R}^N)$ von (7.1) die folgende Abschätzung für beliebige Paare konzentrischer Zylinder $Q_\sigma \subset Q_R \subset Q$ gilt:*

$$\Big(\int_{Q_\sigma} |\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{1/q} + R\Big(\int_{Q_\sigma} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^q \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{1/q} \le \tag{7.11}$$

$$\le c\,R^{-1}\Big(\frac{R}{R-\sigma}\Big)^{n+3}\Big(\int_{Q_R} |u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{1/q}.$$

Beweis. - 1) Mit einer analogen Argumentation, wie im Beweis von Lemma A.2 bestätigt man, daß für beliebiges $0 < \varepsilon < 1$ die folgende multiplikative Ungleichung gilt:

$$
(7.12)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{Q_1} v^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \;\le\; c\,\varepsilon^{-(n+1)/2}\Big(\int_{Q_1} |v|^q \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s\Big)^{2/q} + \\ \qquad\qquad\qquad + \varepsilon \displaystyle\int_{Q_1} |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \,+\, \varepsilon \int_{Q_1} \Big|\frac{\partial v}{\partial t}\Big|^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \\ \forall\, v \in W_2^{1,1}(Q_1) \end{cases}
$$

($c = \text{const}$ unabhängig von ε).

2) Sei $u \in V_2^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung von (7.1). Mit Hilfe der üblichen Mittelfunktionen und Verwendung der bekannten Caccioppoli-Ungleichung zeigt man, daß $u \in C^\infty(Q;\mathbb{R}^N)$. Seien $X_0 := \{x_0, t_0\} \in Q$ und $0 < \sigma < R < \operatorname{dist}(X_0, \partial Q)$ beliebig, aber fixiert. Seien $\sigma \le \sigma_1 < \sigma_2 \le R$. Wir setzen $\overline{\sigma} := (\sigma_1 + \sigma_2)/2$. Unter Verwendung der Koordinatentransformation

$$
\{x,t\} \mapsto \{y,s\} \;=\; \Big\{\frac{x - x_0}{\overline{\sigma}}, \frac{t - t_0}{\overline{\sigma}^2}\Big\}
$$

und der Transformationsformel für das Lebesgue-Integral folgert man mit Hilfe von (7.12) und (7.6) (mit $\sigma = \overline{\sigma}$ und $R = \sigma_2$)

$$
(7.13)\qquad \begin{aligned} \int_{Q_{\overline{\sigma}}} |u|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;&\le\; c\,\varepsilon^{-(n+1)/2}\,\mathrm{mes}(Q_{\overline{\sigma}})^{1-2/q}\Big(\int_{Q_{\overline{\sigma}}} |u|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{2/q} + \\ &\quad + \varepsilon\overline{\sigma}^2 \int_{Q_{\overline{\sigma}}} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \,+\, \varepsilon\overline{\sigma}^4 \int_{Q_{\overline{\sigma}}} \Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le \\ &\le\; c\,\varepsilon^{-(n+1)/2}\,\mathrm{mes}(Q_{\sigma_2})^{1-2/q}\Big(\int_{Q_{\sigma_2}} |u|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{2/q} + \\ &\quad + \varepsilon(1 + c'')\frac{R^4}{(\sigma_2 - \sigma_1)^2} \int_{Q_{\sigma_2}} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \end{aligned}
$$

Kombiniert man (7.5) (mit $\sigma = \sigma_1$ und $R = \overline{\sigma}$) und (7.13) $\Big(\text{mit } \varepsilon := \dfrac{(\sigma_2 - \sigma_1)^4}{2c'(1 + c'')R^4}\Big)$, so folgt

$$
\begin{aligned} \int_{Q_{\sigma_1}} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;&\le\; c\Big(\frac{R}{\sigma_2 - \sigma_1}\Big)^{2(n+2)} R^{-2}\,\mathrm{mes}(Q_{\sigma_2})^{1-2/q}\Big(\int_{Q_{\sigma_2}} |u|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{2/q} + \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_{Q_{\sigma_2}} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \end{aligned}
$$

Nach Anwendung von Lemma A.3 bekommt man

$$
(7.14)\qquad \int_{Q_\sigma} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le\; c\Big(\frac{R}{R - \sigma}\Big)^{2(n+2)} R^{-2}\,\mathrm{mes}(Q_R)^{1-2/q}\Big(\int_{Q_R} |u|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{2/q}.
$$

Kombiniert man die Ungleichungen (7.10) und (7.14), so ergibt sich für beliebige $0 < \sigma < R < \operatorname{dist}(X_0, \partial Q)$

$$\int_{Q_\sigma} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \,+\, R^2 \int_{Q_\sigma} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \,\le$$

$$\le c\left(\frac{R}{R-\sigma}\right)^{2(n+3)} R^{-2} \operatorname{mes}(Q_R)^{1-2/q}\left(\int_{Q_R} |u|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{2/q}.$$

Die Behauptung (7.11) folgt nunmehr aus der obigen Ungleichung unter Benutzung der Hölderschen Ungleichung.

3) Sei $u \in V_q^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung von (7.1). Seien $Q_\sigma \subset Q_R \subset\subset Q$ beliebig gewählte konzentrische Teilzylinder. Mit $u_\varepsilon \in C^\infty(Q_R;\mathbb{R}^N)\,(0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(Q_R, \partial Q))$ bezeichnen wir die mit Hilfe der üblichen Mittelfunktionen erzeugte Glättung von u. Da u_ε ebenfalls eine schwache Lösung von (7.1) (in Q_R) ist, folgt aus dem obigen Beweisschritt die Abschätzung:

$$\left(\int_{Q_\sigma} |\nabla u_\varepsilon|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/q} + R\left(\int_{Q_\sigma} \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right|^q \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/q} \le$$

$$\le c\,R^{-1}\left(\frac{R}{R-\sigma}\right)^{n+3}\left(\int_{Q_R} |u_\varepsilon|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/q},$$

wobei $c = \text{const} > 0$ nur von $c_0/\nu_0, q, n$ und N abhängt. Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus der obigen Ungleichung nach Ausführung des Grenzüberganges $\varepsilon \to 0$. ■

Folgerung 7.1 *Sei $1 < q < 2$ beliebig fixiert und seien $m, k \in \mathbb{N}, \nu \in \mathbb{N}^n$ $(|\nu| \le k)$. Seien $A^{\alpha\beta}_{ij(*)}$ $(\alpha, \beta = 1, \dots, n; i, j = 1, \dots, N)$ konstante Koeffizienten, die den Bedingungen (7.2) und (7.3) genügen. Dann gibt es eine positive Konstante $c = c(c_0/\nu_0, q, n, N, m, k)$ mit der Eigenschaft, daß für jede schwache Lösung $u \in V_q^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N)$ von (7.1) die folgende Abschätzung für beliebige Paare konzentrischer Teilzylinder $Q_\sigma \subset Q_R \subset Q$ gilt:*

$$\left(\int_{Q_\sigma} \left|\frac{\partial^m}{\partial t^m} D^\nu u\right|^q \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/q} \le \tag{7.15}$$

$$\le c\,R^{-(2m+k)}\left(\frac{R}{R-\sigma}\right)^{(n+3)(m+k)}\left(\int_{Q_R} |u - u_{Q_R}|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/q}. \quad ■$$

7.3 Fundamentale Abschätzungen

Mit einer analogen Argumentation, die zur Verallgemeinerung der fundamentalen Abschätzung im elliptischen Fall führte, leitet man analoge fundamentale Abschätzungen für schwache Lösungen parabolischer Systeme mit konstanten Koeffizienten her. Die zu Grunde liegende Idee geht auf eine Methode von S. Campanato (vgl. [Campanato (1965)], [Campanato (1984)]) zurück, wo sowohl im elliptischen als auch im parabolischen Fall fundamentale Abschätzungen bezüglich der L^2-Norm bewiesen wurden. Der folgende Satz enthält eine entsprechende Verallgemeinerung.

Satz 7.2 *Sei $1 < q < 2$. Seien $A^{\alpha\beta}_{ij(*)}$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, n; ij = 1, \ldots, N)$ konstante Koeffizienten, die den Bedingungen (7.2) und (7.3) genügen. Dann gibt es eine positive Konstante $A = A(c_0/\nu_0, q, n, N)$, so daß für jede schwache Lösung $u \in V^{1,0}_q(Q; \mathbb{R}^N)$ von (7.1) gilt:*

$$\int_{Q_{\tau R}} |u - u_{Q_{\tau R}}|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\leq\; A^q \tau^{q+n+2} \int_{Q_R} |u - u_{Q_R}|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{7.16}$$

für beliebige $X_0 \in Q, 0 < R < \operatorname{dist}(X_0, \partial Q)$ und für alle $0 < \tau < 1$.

Beweis. - Zunächst sei bemerkt, daß für $\frac{1}{2} \leq \tau < 1$ die Ungleichung (7.16) trivialerweise erfüllt ist. Aus diesem Grunde genügt es, die Behauptung des Satzes für den Fall $0 < \tau < \frac{1}{2}$ zu zeigen .

Wir beginnen mit der Betrachtung des Spezialfalls $X_0 = (0, 0)$, $R = 1$. Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m > \dfrac{n+2}{q}$. Mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung, der Poincaré-Ungleichung (b.23) (mit $f \equiv 0$) und des Sobolevschen Einbettungssatzes findet man

$$\begin{aligned}\int_{Q_\tau} |u - u_{Q_\tau}|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;&\leq\; c\,\tau^q \int_{Q_\tau} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\leq \\ &\leq\; c\,\tau^{q+n+2} \Big(\max_{\{x,t\} \in \overline{Q}_{1/2}} |\nabla u(x,t)| \Big)^q \;\leq\; c\,\tau^{q+n+2} \sum_{k+|\alpha| \leq m} \int_{Q_{1/2}} \left| \frac{\partial^k}{\partial^k t} D^\alpha u \right|^q \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Schätzt man die rechte Seite der obigen Ungleichung mit Hilfe von (7.15) (siehe Folgerung 7.1) weiter ab, so ergibt sich schließlich

$$\int_{Q_\tau} |u - u_{Q_\tau}|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\leq\; A^q \tau^{q+n+2} \int_{Q_1} |u - u_{Q_1}|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \tag{7.17}$$

womit die Behauptung (7.16) für diesen Fall bewiesen ist.

Nun seien $X_0 = \{x_0, t_0\} \in Q$ und $0 < R < \operatorname{dist}(X_0, \partial Q)$ beliebig gewählt. Unter Verwendung der Koordinatentransformation $\{x, t\} \mapsto \{y, s\} = \Big\{\dfrac{x - x_0}{R}, \dfrac{t - t_0}{R^2}\Big\}$, die den Zylinder Q_R auf Q_1 abbildet, läßt sich die Behauptung (7.16) zusammen mit der Transformationsformel für das Lebesgue-Integral und Benutzung der oben bewiesenen Abschätzung (7.17) leicht bestätigen. ■

Als unmittelbare Folgerung des soeben bewiesenen Satzes ergibt sich die

Folgerung 7.2 *Seien die Voraussetzungen von Satz 7.1 erfüllt. Dann gibt es eine positive Konstante* $A = A(c_0/\nu_0, q, n, N)$*, so daß für jede schwache Lösung* $u \in V_q^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N)$ *von* (7.1) *gilt:*

$$\Phi(u; X_0, \tau R) \;\leq\; A\,\tau\Phi(u; X_0, R) \quad \forall\, X_0 \in Q,\ \forall\, 0 < R < \operatorname{dist}(X_0, \partial Q), \tag{7.18}$$

wobei

$$\Phi(u; X_0, \sigma) \;=\; \left(\frac{1}{\sigma^q}\fint_{Q_\sigma} |u - u_{Q_\sigma} - (\nabla u)_{Q_\sigma}\cdot(x - x_0)|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/q} +$$
$$+ \left(\fint_{Q_\sigma} |\nabla u - (\nabla u)_{Q_\sigma}|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/q}$$

$(X_0 \in Q, \quad 0 < \sigma < \operatorname{dist}(X_0, \partial Q))$.

Beweis. - Sei $u \in V_q^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung von (7.1). Unter Verwendung von Lemma 7.1 und partieller Integration verifiziert man elementar, daß die Funktion $D_\alpha u$ ($\alpha \in \{1, \dots, n\}$) ebenfalls eine schwache Lösung von (7.1) ist. Satz 7.2 impliziert also

$$\int_{Q_{\tau R}} |\nabla u - (\nabla u)_{Q_{\tau R}}|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\leq\; c\,\tau^{q+n+2}\int_{Q_{R/2}} |\nabla u - (\nabla u)_{Q_{R/2}}|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{7.19}$$

Auf der anderen Seite folgt unter Benutzung der Poincaré-Ungleichung (b.23) (mit $f \equiv 0$) und Anwendung von (7.19)

$$\int_{Q_{\tau R}} |u - u_{Q_{\tau R}} - (\nabla u)_{Q_{\tau R}}\cdot(x - x_0)|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\leq \tag{7.20}$$
$$\leq\; c\,\tau^q R^q \tau^{q+n+2}\int_{Q_{R/2}} |\nabla u - (\nabla u)_{Q_{R/2}}|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Schätzt man die rechte Seite von (7.20) mit Hilfe der Caccioppoli-Ungleichung (7.15) [2] weiter nach oben ab, so ergibt sich schließlich

$$\fint_{Q_{\tau R}} |u - u_{Q_{\tau R}} - (\nabla u)_{Q_{\tau R}}\cdot(x - x_0)|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\leq \tag{7.21}$$
$$\leq\; c\,\tau^{2q}\fint_{Q_R} |u - u_{Q_{\tau R}} - (\nabla u)_{Q_R}\cdot(x - x_0)|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Die Behauptung bestätigt man nun durch Kombination von (7.19) und (7.21). ■

[2] Man beachte, daß mit u auch $u - u_{Q_R} - (\nabla u)_{Q_{\tau R}}\cdot(x - x_0)$ eine schwache Lösung von (7.1) ist.

Kapitel 8

Der Fall $A_i^\alpha(\xi)$

In den folgenden Betrachtungen behalten wir die Bezeichnungen der letzten Kapitel bei. Wir studieren nun schwache Lösungen des folgenden nichtlinearen parabolischen Systems partieller Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} - D_\alpha A_i^\alpha(\nabla u) = 0 \quad \text{in} \quad Q \qquad (i = 1, \ldots, N), \tag{8.1}$$

wobei die Koeffizienten A_i^α $(\alpha = 1, \ldots, n; i = 1, \ldots, N)$ auf $\mathbb{R}^{nN}$ stetig differenzierbare Funktionen seien und den folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A_i^\alpha}{\partial \xi_\beta^j}(\xi)\eta_\alpha^i \eta_\beta^j \ge \nu_0(1 + |\xi|)^{q-2}|\eta|^2 \\ \forall\, \xi, \eta \in \mathbb{R}^{nN} \ (\nu_0 = \text{const} > 0); \end{cases} \tag{8.2}$$

$$\left(\sum_{i,j=1}^{N} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \left(\frac{\partial A_i^\alpha}{\partial \xi_\beta^j}(\xi) \right)^2 \right)^{1/2} \le c_0(1 + |\xi|)^{q-2} \quad \forall\, \xi \in R^{nN} \quad (c_0 = \text{const}). \tag{8.3}$$

(Zur Definition schwacher Lösungen von (8.1) siehe Kapitel 6.)

8.1 A-priori-Abschätzungen für die Zeitableitung und der zweiten Ortsableitungen

Im vorliegenden Abschnitt beschäftigen wir uns mit Fragen höherer Differenzierbarkeit schwacher Lösungen des Systems (8.1). Da dieses System ein Spezialfall von (6.37) ist, liefert Satz 6.2 das folgende Regularitätsresultat:

Sei $u \in V_q^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N)$ $(q > 2n/(n+2))$ eine schwache Lösung von (8.1) mit (8.2) , (8.3). Dann existieren die zweiten schwachen partiellen Ableitungen bezüglich der Ortsvariablen x_β $(\beta \in \{1,\dots,n\})$, und für alle $t_0 \in (0,T)$ und für beliebige $\Omega' \subset\subset \Omega$ gilt:

$$\underset{t\in(t_0,T)}{\operatorname{ess\,sup}} \int_{\Omega'} |\nabla u(\cdot,t)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{t_0}^T \int_{\Omega'} (1+|\nabla u|)^{q-2} |D^2 u|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t < +\infty. \tag{8.4}$$

In den folgenden Ausführungen geht es darum, ein analoges Resultat wie das Obige für die Zeitableitung einer schwachen Lösung u von (8.1) herzuleiten. Hierbei verwenden wir die bekannte Methode des Differenzenquotienten.

Lemma 8.1 *Seien $A_i^\alpha(\xi)$ $(\alpha = 1,\dots,n; i = 1,\dots,N)$ stetig differenzierbare Koeffizienten, welche den Bedingungen (8.2) und (8.3) genügen. Sei $u \in V_q^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung von (8.1). Dann gilt für alle $t_0 \in (0,T)$ und für beliebige $\Omega' \subset\subset \Omega$:*

$$\underset{t\in(t_0,T)}{\operatorname{ess\,sup}} \int_{\Omega'} \left|\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)\right|^2 \mathrm{d}x + \int_{t_0}^T \int_{\Omega'} (1+|\nabla u|)^{q-2} \left|\frac{\partial}{\partial t}\nabla u\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t < +\infty. \tag{8.5}$$

Beweis. - Wie man leicht nachprüft, sind die Voraussetzungen von Satz 6.1 erfüllt. Hiermit erhält man

$$\int_{t_0}^T \int_{\Omega'} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t < +\infty \quad \forall\, t_0 \in (0,T),\ \forall\, \Omega' \subset\subset \Omega. \tag{8.6}$$

Nun sei $0 < t_1 < T$. Unter Benutzung des Steklov-Mittels findet man

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial u_\lambda^i}{\partial t}(x,t)\psi^i(x)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega (A_i^\alpha(\nabla u))_\lambda(x,t) D_\alpha \psi^i(x)\,\mathrm{d}x = 0 \\ \text{ffa. } t \in (0,t_1),\ \forall\, \lambda \in (0,T-t_1),\ \forall\, \psi \in \overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega;\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{8.7}$$

Seien $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$, $0 < t_0' < t_0 < t_1$. Sei $\zeta \in C_c^\infty(\Omega'')$ mit $\zeta(x) = 1$ für alle $x \in \Omega'$ und sei $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\rho(t) = 0$ für alle $t \in (-\infty, t_0']$ und $\rho(t) = 1$ für alle $t \in (t_0, +\infty)$. Wie im Abschnitt 6.1 bezeichne Δ_h die Differenz bezüglich der Variablen $t \in (0,T)$. In (8.7) bilden wir auf beiden Seiten die Differenz Δ_h $(0 < h < T - t_1 - \lambda)$, setzen dort die zulässige Testfunktion $\psi(x) := (\Delta_h u_\lambda)(x,t)\zeta^2(x)\rho(t)$ $(x \in \Omega, t \in (0,t_1))$ ein und integrieren beide Seiten von (8.7) über das Intervall $(0,s)$ $(s \in (0,t_1))$. Anschließend wenden wir partielle Integration an und führen den Grenzübergang $\lambda \to 0$ durch. Dies impliziert unter Berücksichtigung von (8.2)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta_h u(\cdot,s)|^2\zeta^2\,\mathrm{d}x\,\rho(s) + \\
&\qquad + \nu_0\int_0^s\int_\Omega (1+|\nabla u(x,s+h)|+|\nabla u|)^{q-2}|\Delta_h\nabla u|^2\zeta^2\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \\
&\quad \le -2\int_0^s\int_\Omega (\Delta_h A_i^\alpha(\nabla u))(\Delta_h u^i)(D_\alpha\zeta)\zeta\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^s\int_\Omega |\Delta_h u|^2\zeta^2\rho'\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \\
&\quad = I_1 + I_2
\end{aligned}$$

für fast alle $s \in (0,t_1)$.

Mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung verifiziert man

$$(\Delta_h A_i^\alpha(\nabla u))(x,t) = \int_0^1 \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial \xi_\beta^j}((1-\tau)\nabla u(x,t+h)+\tau\nabla u(x,t))\,\mathrm{d}\tau(\Delta_h D_\beta u^j)(x,t)$$

für fast alle $\{x,t\}\in\Omega\times(0,T-h)$. Mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, der Bedingung (8.3) und nach Anwendung von Lemma A.4, der Youngschen Ungleichung und (6.12) ergibt sich

$$\begin{aligned}
I_1 \le \frac{\nu_0}{2}\int_0^s\int_\Omega (1+|\nabla u(x,s+h)|+|\nabla u|)^{q-2}|\Delta_h\nabla u|^2\zeta^2\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \\
+ c\,h^2\int_{t_0'}^T\int_{\Omega''}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Ebenfalls unter Verwendung von (6.12) bekommt man

$$I_2 \le c\,h^2\int_{t_0'}^T\int_{\Omega''}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Nach Einsetzen der Abschätzungen für I_1 und I_2 in die obige Ungleichung erhält man

$$\begin{aligned}
\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0,t_1)}\int_{\Omega'}|\Delta_h u(\cdot,t)|^2\,\mathrm{d}x + \nu_0\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega'}(1+|\nabla u(x,t+h)|+|\nabla u|)^{q-2}|\Delta_h\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
\le c\,h^2\int_{t_0'}^T\int_{\Omega''}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

wobei $c = \text{const}$ nicht von h abhängt. Dividiert man beide Seiten der letzten Ungleichung durch h^2, so folgt mit einer analogen Argumentation wie im Beweis von Satz 6.2 die Behauptung des Lemmas nach Ausführung des Grenzüberganges $h \to 0$. ■

Wir bemerken, daß aus (8.5) unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in V_q^{1,0}(\Omega' \times (t_0, T); \mathbb{R}^N) \quad \forall\, t_0 \in (0,T),\ \forall\, \Omega' \subset\subset \Omega, \tag{8.8}$$

und mit Hilfe der Anmerkung 6.1 bestätigt man

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^{q(n+2)/n}(\Omega' \times (t_0, T); \mathbb{R}^N) \quad \forall\, t_0 \in (0,T),\ \forall\, \Omega' \subset\subset \Omega. \tag{8.9}$$

Sei $f : Q \to \mathbb{R}^N$ meßbar. Wir setzen f auf R^{n+1} durch 0 fort und bezeichnen diese ebenfalls mit f. Dann bezeichne $\Delta_h^{(*)} f$ den Differenzenquotienten entweder bezüglich einer der Ortsvariablen x_β ($\beta \in \{1, \dots, n\}$) oder bezüglich der Variablen t. Wir beweisen nun die folgende nützliche Ungleichung:

Lemma 8.2 *Seien $A_i^\alpha(\xi)$ ($\alpha = 1, \dots, n; i = 1, \dots, N$) differenzierbare Koeffizienten, welche den Bedingungen (8.2) und (8.3) genügen. Sei $u \in V_q^{1,0}(Q; \mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung von (8.1), wobei*

$$q > \frac{2n}{n+2} \tag{8.10}$$

Seien $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$ und $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\rho \ge 0$ in $\mathbb{R}$ und $\rho \equiv 0$ in $(-\infty, t_0]$ ($t_0 \in (0,T)$) beliebig fixiert. Dann haben wir für jedes $0 \le \gamma < \dfrac{q(n+2)}{2n} - 1$ und für alle $t_1 \in (t_0, T)$ die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_\Omega |\Delta_h^{(*)} u(\cdot, t)|^{2+\gamma} \zeta^2 \rho(t)\, \mathrm{d}x + \\
&+ \left(\frac{\nu_0}{2} - \frac{8c_0\gamma}{q-1}\right) \int_0^t \int_\Omega (1 + |\nabla u(\cdot + he_*)| + |\nabla u|)^{q-2} |\Delta_h^{(*)} u|^\gamma |\Delta_h^{(*)} \nabla u|^2 \zeta^2 \rho\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}s \\
&\le c \int_0^t \int_\Omega (1 + |\nabla u(\cdot + he_*)| + |\nabla u|)^{q-2} |\Delta_h^{(*)} u|^{2+\gamma} |\nabla \zeta|^2 \rho\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}s + \\
&\quad + c \int_0^t \int_\Omega |\Delta_h^{(*)} u|^{2+\gamma} \zeta^2 \rho'\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{8.11}$$

für fast alle $t \in (t_0, t_1)$ und für alle $0 < h < \min\{t_0, T - t_1, \operatorname{dist}(\operatorname{supp}(\zeta), \partial\Omega)\}$, wobei $c = \mathrm{const}$ nur von c_0/ν_0 und q abhängt.

Beweis. - Sei $u \in V_q^{1,0}(Q; \mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung von (8.1). Zunächst folgt aus Satz 6.2 für beliebige $t_0 \in (0,T)$ und $\Omega' \subset\subset \Omega$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t \in (t_0, T)} \int_\Omega |\nabla u(\cdot, t)|^2\, \mathrm{d}x + \int_{t_0}^T \int_{\Omega'} (1 + |\nabla u|)^{q-2} |D^2 u|^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t < +\infty. \tag{8.12}$$

Wie in der obigen Bemerkung schließt man hieraus

$$\nabla u \in V_q^{1,0}(\Omega' \times (t_0, T); \mathbb{R}^{nN}), \tag{8.13}$$

$$\nabla u \in L^{q(n+2)/n}(\Omega' \times (t_0, T); \mathbb{R}^{nN}) \tag{8.14}$$

für alle $t_0 \in (0, T)$ und für beliebige $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Wir fixieren nun ein beliebiges $0 < \gamma < \dfrac{q(n+2)}{2n} - 1$. Wie man leicht nachprüft gilt:

$$\frac{q(n+2)}{n} > p_0 := \max\{q(\gamma+1), 2+\gamma\}. \tag{8.15}$$

Dann folgt aus (8.14) unter Beachtung von (8.15) für beliebige $\Omega' \subset\subset \Omega$ und $t_0 \in (0, T)$

$$u \in W_{p_0}^{1,0}(\Omega' \times (t_0, T); \mathbb{R}^N). \tag{8.16}$$

Seien $0 < t_0 < t_1 < T$. Weiterhin seien $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$ und $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\rho(t) = 0$ für alle $t \in (-\infty, t_0)$ nichtnegative Funktionen. Wir wählen $0 < h < \min\{t_0, T - t_1, \operatorname{dist}(\operatorname{supp}(\zeta), \partial\Omega)\}$ beliebig. Beachtet man (8.15), so folgt mit Hilfe der Produkt- und Kettenregel

$$|\Delta_h^{(*)} u|^\gamma (\Delta_h^{(*)} u)\zeta^2 \rho \in W_q^{1,0}(\Omega \times (t_0, t_1); \mathbb{R}^N).$$

Hieraus schließt man, daß für fast alle $t \in (t_0, t_1)$ die Funktion

$$\psi(x) = \Big(\Delta_{-h}^{(*)} |\Delta_h^{(*)} u_\lambda|^\gamma (\Delta_h^{(*)} u_\lambda)\zeta^2 \rho\Big)(x, t)$$

($x \in \Omega$; $\lambda \in (0, T - t_1 - h)$ für (8.7) zulässig ist. Wir setzen diese Funktion dort ein, integrieren beide Seiten von (8.7) über das Intervall (t_0, t) $(t \in (t_0, t_1))$, verwenden partielle Integration und führen anschließend den Grenzübergang $\lambda \to 0$ aus. Unter Berücksichtigung von (8.2) und Anwendung der Produkt- und Kettenregel bekommt man

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta_h^{(*)} u(\cdot, t)|^{2+\gamma} \zeta^2 \rho(t)\,\mathrm{d}x + \\
&\quad + \nu_0 \int_0^t \int_\Omega (1 + |\nabla u(\cdot + he_*)| + |\nabla u|)^{q-2} |\Delta_h^{(*)} u|^\gamma |\Delta_h^{(*)} \nabla u|^2 \zeta^2 \rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + \\
&\quad + \gamma \int_0^t \int_\Omega (\Delta_h^{(*)} A_i^\alpha) |\Delta_h^{(*)} u|^{\gamma-2} (\Delta_h^{(*)} u^k)(\Delta_h^{(*)} D_\alpha u^k)(\Delta_h^{(*)} u^i)\zeta^2 \rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \le \\
&\le -2 \int_0^t \int_\Omega (\Delta_h^{(*)} A_i^\alpha) |\Delta_h^{(*)} u|^\gamma (\Delta_h^{(*)} u^i)(D_\alpha \zeta)\zeta \rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + \\
&\qquad + \int_0^t \int_\Omega |\Delta_h^{(*)} u|^{2+\gamma} \zeta^2 \rho'\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{8.17}$$

Beachtet man (8.3), so folgt unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung zusammen mit Lemma A.4

$$
\begin{aligned}
&(\Delta_h^{(*)} A_i^\alpha)|\Delta_h^{(*)} u|^{\gamma-2}(\Delta_h^{(*)} u^k)(\Delta_h^{(*)} D_\alpha u^k)(\Delta_h^{(*)} u^i) = \\
&= \int_0^1 \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial \xi_\beta^j}((1-s)\nabla u + s\nabla u(\cdot + he_*))\,\mathrm{d}s \times \\
&\qquad \times (\Delta_h^{(*)} D_\beta u^j)|\Delta_h^{(*)} u|^{\gamma-2}(\Delta_h^{(*)} u^k)(\Delta_h^{(*)} D_\alpha u^k)(\Delta_h^{(*)} u^i) \le \\
&\le \frac{8c_0}{q-1}(1 + |\nabla u(\cdot + he_*)| + |\nabla u|)^{q-2}|\Delta_h^{(*)} u|^\gamma |\Delta_h^{(*)} \nabla u|^2
\end{aligned}
\tag{8.18}
$$

fast überall in $\operatorname{supp}(\zeta) \times (0, t_1)$.

In ähnlicher Weise bekommt man mit Hilfe der Bedingung (8.3) und Anwendung der Youngschen Ungleichung

$$
\begin{aligned}
&-2(\Delta_h^{(*)} A_i^\alpha)|\Delta_h^{(*)} u|^\gamma (\Delta_h^{(*)} u^i)(D_\alpha \zeta)\zeta\rho \le \\
&\le \frac{\nu_0}{2}(1 + |\nabla u(\cdot + he_*)| + |\nabla u|)^{q-2}|\Delta_h^{(*)} u|^\gamma |\Delta_h^{(*)} \nabla u|^2 \zeta^2 \rho + \\
&\qquad + c\,(1 + |\nabla u(\cdot + he_*)| + |\nabla u|)^{q-2}|\Delta_h^{(*)} u|^{2+\gamma}|\nabla \zeta|^2 \rho
\end{aligned}
$$

fast überall in $\operatorname{supp}(\zeta) \times (0, t_1)$.

Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus (8.17) unter Verwendung der letzten beiden Abschätzungen. ■

Satz 8.1 *Seien $A_i^\alpha(\xi)$ $(\alpha = 1, \dots, n; i = 1, \dots, N)$ differenzierbare Koeffizienten mit (8.2) und (8.3). Sei $u \in V_q^{1,0}(Q; \mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung von (8.1) und sei (8.10) erfüllt. Dann existiert eine positive Zahl $\gamma = \gamma(q, n, c_0, \nu_0)$, so daß für beliebige $t_0 \in (0, T)$ und $\Omega' \subset\subset \Omega$ gilt:*

$$
\operatorname*{ess\,sup}_{t \in (t_0, T)} \int_{\Omega'} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \right|^{2+\gamma} \mathrm{d}x < +\infty,
\tag{8.19}
$$

$$
\operatorname*{ess\,sup}_{t \in (t_0, T)} \int_{\Omega'} |\nabla u(\cdot, t)|^{2+\gamma}\,\mathrm{d}x + \int_{t_0}^T \int_{\Omega'} (1 + |\nabla u|)^{q-2+\gamma}|D^2 u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t < +\infty.
\tag{8.20}
$$

Beweis. - Seien $0 < t_0' < t_0 < t_1 < T$ und $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega''' \subset\subset \Omega$ fixiert. Setzt man in (8.11)

$$
\gamma := \min\left\{ \frac{\nu_0(q-1)}{32 c_0}, \frac{q(n+2)}{2n} - 1 \right\},
$$

so ergibt sich nach geeigneter Wahl der Schnittfunktionen $\zeta \in C_c^\infty(\Omega'')$ und $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ für alle $0 < h < \min\{t_0, T - t_1, \operatorname{dist}(\Omega'', \partial\Omega''')\}$

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0,t_1)} \int_{\Omega'} |\Delta_h^{(*)} u(\cdot,t)|^{2+\gamma}\,\mathrm{d}x + \\
(8.21)\qquad &+ \frac{\nu_0}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega'} (1 + |\nabla u(\cdot + he_*)| + |\nabla u|)^{q-2} |\Delta_h^{(*)} u|^{\gamma} |\Delta_h^{(*)} \nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \\
&\le c \int_{t_0'}^{t_1}\int_{\Omega''} |\Delta_h^{(*)} u|^{2+\gamma}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

wobei $c = \text{const}$ nur von $c_0/\nu_0, q, n, N$ und $1/\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega'')$ abhängt.

(i) *Beweis von* (8.19): Nun bezeichne in (8.21) $\Delta_h^{(*)}$ den Differenzenquotienten bezüglich der Variablen $t \in (t_0, t_1)$. Hieraus folgt nach Anwendung der Eigenschaft (6.12)

$$\begin{aligned}
\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0,t_1)} \int_{\Omega'} |\Delta_h^{(*)} u(\cdot,t)|^{2+\gamma}\,\mathrm{d}x &\le c \int_{t_0'}^{T}\int_{\Omega''} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{2+\gamma} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \\
&\le c \left(\int_{t_0'}^{T}\int_{\Omega''} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{\frac{q(n+2)}{n}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right)^{\frac{n(2+\gamma)}{q(n+2)}} < +\infty.
\end{aligned}$$

Da die Konstante c der rechten Seite dieser Ungleichung weder von h noch von t_1 abhängt, folgt die Behauptung aus

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0,t_1)} \int_{\Omega'} \left|\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)\right|^{2+\gamma} \mathrm{d}x \le \\
&\le \limsup_{p\to\infty} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{\Omega'} \left|\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)\right|^{2+\gamma} \mathrm{d}x \right)^{p/(2+\gamma)} \mathrm{d}t \right\}^{(2+\gamma)/p} \le \\
&\le \liminf_{h\to 0^+} \left\{ \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0,t_1)} \int_{\Omega'} |\Delta_h^{(*)} u(\cdot,t)|^{2+\gamma}\,\mathrm{d}x \right\} \le \\
&\le c \left(\int_{t_0'}^{T}\int_{\Omega''} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{\frac{q(n+2)}{n}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right)^{\frac{n(2+\gamma)}{q(n+2)}} < +\infty.
\end{aligned}$$

(ii) *Beweis von* (8.20): Als nächstes bezeichne in (8.21) $\Delta_h^{(*)}$ den Differenzenquotienten bezüglich einer der Variablen x_β $(\beta \in \{1, \ldots, n\})$. Unter Benutzung der Eigenschaft (6.41) bekommt man aus (8.21)

$$
\begin{aligned}
&\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0,t_1)} \int_{\Omega'} |\Delta_h^{(*)} u(\cdot,t)|^{2+\gamma}\,\mathrm{d}x + \\
(8.22)\qquad &+ \frac{\nu_0}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega'} (1+|\nabla u(\cdot+he_*)|+|\nabla u|)^{q-2}|\Delta_h^{(*)}u|^\gamma|\Delta_h^{(*)}\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \\
&\le c\left(\int_{t_0'}^{T}\int_{\Omega'''} |\nabla u|^{\frac{q(n+2)}{n}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{n(2+\gamma)}{q(n+2)}},
\end{aligned}
$$

wobei $c = \mathrm{const}$ weder von h noch von t_1 abhängt. Mit einer analogen Argumentation wie für den Beweis von (8.19) erhält man

$$
\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0,t_1)} \int_{\Omega'} |D_\beta u(\cdot,t)|^{2+\gamma}\,\mathrm{d}x \le c\left(\int_{t_0'}^{T}\int_{\Omega'''} |\nabla u|^{\frac{q(n+2)}{n}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{n(2+\gamma)}{q(n+2)}} < +\infty.
$$

Es bleibt also nur noch, den zweiten Summanden in (8.20) abzuschätzen. Zunächst zeigt man unter Beachtung von (8.22) und der Reflexivität des Raumes $L^2(\Omega'\times(t_0,t_1);\mathbb{R}^{nN})$ die Existenz einer Folge (h_j) positiver Zahlen mit $\lim_{j\to\infty} h_j = 0$ und einer Funktion $f \in L^2(\Omega'\times(t_0,t_1);\mathbb{R}^{nN})$, so daß:

$$
(8.23)\qquad \begin{cases} (1+|\nabla u(\cdot+h_je_*)|+|\nabla u|)^{(q-2)/2}|\Delta_{h_j}^{(*)}u|^{\gamma/2}\Delta_{h_j}^{(*)}\nabla u \rightharpoonup f \\ \text{in}\quad L^2(\Omega'\times(t_0,t_1);\mathbb{R}^{nN})\quad \text{für}\quad j\to+\infty. \end{cases}
$$

Auf der anderen Seite folgt aus (8.4) und (8.5) zusammen mit der Hölderschen Ungleichung

$$
\int_{t_0}^{T}\int_{\Omega'''}\left(|D^2u|^q + \left|\frac{\partial}{\partial t}\nabla u\right|^q\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t < +\infty,
$$

und nach Anwendung der Eigenschaften (6.12) und (6.41) bekommt man

$$
\begin{aligned}
(8.24)\qquad &\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega'}\left(|\nabla\Delta_h^{(*)}u|^q + \left|\frac{\partial}{\partial t}\Delta_h^{(*)}u\right|^q\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \\
&\le \int_{t_0}^{T}\int_{\Omega'''}\left(|D^2u|^q + \left|\frac{\partial}{\partial t}\nabla u\right|^q\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t < +\infty.
\end{aligned}
$$

Also ist die Menge $\{\Delta_h^{(*)}u \,|\, 0<h<\operatorname{dist}(\Omega'',\partial\Omega''')\}$ in $W_q^{1,1}(\Omega'\times(t_0,t_1);\mathbb{R}^N)$ beschränkt. Aufgrund von

$$
\Delta_h^{(*)}u \rightharpoonup D_\beta u \quad \text{in}\quad L^q(\Omega'\times(t_0,t_1);\mathbb{R}^N)\quad \text{für}\quad h\to 0
$$

und der Kompaktheit der Einbettung

$$W_q^{1,1}(\Omega' \times (t_0,t_1);\mathbb{R}^N) \subset L^q(\Omega' \times (t_0,t_1);\mathbb{R}^N)$$

ergibt sich

$$\Delta_{h_j}^{(*)} u \to D_\beta u \quad \text{in} \quad L^q(\Omega' \times (t_0,t_1);\mathbb{R}^N) \quad \text{für} \quad j \to +\infty. \tag{8.25}$$

Beachtet man die Stetigkeit im Mittel, so folgt unter Verwendung des Satzes von Riesz-Fischer und des Satzes von Lebesgue zusammen mit (8.25) (eventuell geht man zu einer Teilfolge über), daß

$$\begin{cases} (1+|\nabla u(\cdot + h_j e_*)| + |\nabla u|)^{(q-2)/2} |\Delta_{h_j}^{(*)} u|^{\gamma/2} \to (1+2|\nabla u|)^{(q-2)/2} |D_\beta u|^{\gamma/2} \\ \text{in} \quad L^{q'}(\Omega' \times (t_0,t_1);\mathbb{R}^{nN}) \quad \text{für} \quad j \to +\infty. \end{cases} \tag{8.26}$$

Weiterhin impliziert die Reflexivität des Raumes $L^q(\Omega' \times (t_0,t_1);\mathbb{R}^{nN})$

$$\Delta_h^{(*)} \nabla u \rightharpoonup D_\beta \nabla u \quad \text{in} \quad L^q(\Omega' \times (t_0,t_1);\mathbb{R}^{nN}) \quad \text{für} \quad h \to 0. \tag{8.27}$$

Kombiniert man (8.26) und (8.27), so folgt mit einer analogen Argumentation wie im Beweis von (6.48)

$$f(x,t) = (1+2|\nabla u(x,t)|)^{(q-2)/2} |D_\beta u(x,t)|^{\gamma/2} D_\beta \nabla u(x,t)$$

für fast alle $\{x,t\} \in \Omega' \times (t_0,t_1)$. Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus (8.23) unter Beachtung der schwachen Unterhalbstetigkeit der Norm. ■

8.2 $C^{\gamma,\gamma/2}$-Regularität bei zwei und drei Raumdimensionen

Parabolische Systeme vom Typ (8.1) wurden für den Fall $q = 2$ in Nečas, Šverák [Nečas and Šverák (1991)] studiert. Hierbei konnte gezeigt werden, daß in den Fällen $2 \le n \le 4$ schwache Lösungen des Systems (8.1) Hölder-stetig sind. Überdies wurde in dieser Arbeit die Hölder-Stetigkeit des Gradienten der schwachen Lösung bei zwei Raumdimensionen nachgewiesen. Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit einer analogen Fragestellung für die Fälle $1 < q < 2$ bei zwei und drei Raumdimensionen. Das Hauptresultat des vorliegenden Abschnittes ist der folgende

Satz 8.2 *Seien $A_i^\alpha(\xi)$ $(\alpha = 1,\ldots,n; i = 1,\ldots,N)$ stetig differenzierbare Funktionen, die den Bedingungen (8.2) und (8.3) genügen. Sei $u \in V_q^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung von (8.1). Dann gibt es ein $\mu \in (0,1)$, so daß für beliebige $0 < t_1 < T$ und $\Omega' \subset\subset \Omega$ gilt:*

(i) *im Fall $n = 2$ und $1 < q < 2$*

$$\nabla u \in C^{\mu,\mu/2}(\overline{\Omega' \times (t_1, T)}; \mathbb{R}^{2N}), \tag{8.28}$$ [1)]

(ii) *im Fall $n = 3$ und $3/2 < q < 2$*

$$u \in C^{\mu,\mu/2}(\overline{\Omega' \times (t_1, T)}; \mathbb{R}^{N}). \tag{8.29}$$

Beweis. - (i) *Der Fall $n = 2$ und $1 < q < 2$*: Seien $t_1 \in (0, T)$ und $\Omega' \subset\subset \Omega$ beliebig fixiert. Nach Satz 8.1 existiert ein $p > 2$, so daß

$$\frac{\partial u}{\partial t}, D_\alpha u \in L^\infty(t_1, T; L^p(\Omega'; \mathbb{R}^N)) \quad (\alpha = 1, 2). \tag{8.30}$$

Nun können wir wie in [Nečas and Šverák (1991)], für fast alle $t \in (t_1, T)$ das folgende elliptische System betrachten:

$$-D_\alpha A_i^\alpha(\nabla u(\cdot, t)) = -\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \quad \text{in} \quad \Omega' \qquad (i = 1, \ldots, N). \tag{8.31}$$

Mit Hilfe von Satz 4.1 bestätigt man, daß für fast alle $t \in (t_1, T)$ ein $r = r(t) > 2$ existiert, so daß $u(\cdot, t) \in W^{2,r}(\Omega''; \mathbb{R}^N)$ für beliebige $\Omega'' \subset\subset \Omega'$. Überdies ergibt sich aus (4.3) die Abschätzung:

$$\int_{\Omega''} |D^2 u(\cdot, t)|^r \,\mathrm{d}x \le c \left(\int_{\Omega'} \left(1 + |\nabla u(\cdot, t)|^q + \left| \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \right|^p \right) \mathrm{d}x \right)^{\frac{rq'}{2pq} \frac{(2-q)(p+2)}{p-2}} \tag{8.32}$$

für fast alle $t \in (t_1, T)$ und für beliebige offene Teilmengen $\Omega'' \subset\subset \Omega'$, wobei c eine positive Konstante bezeichne.

Eine genaue Betrachtung des Beweises von Satz 4.1 zeigt, daß der Exponent $r > 2$ tatsächlich unabhängig von $t \in (t_1, T)$ gewählt werden kann, da die dort auftretenden Konstanten nicht von t, sondern nur von $c_0/\nu_0, q, N$ abhängen. Aus dem gleichen Grund hängt auch die in (8.32) auftretende Konstante nicht von t, sondern nur von $c_0/\nu_0, q, N$ und $1/\operatorname{dist}(\Omega'', \partial\Omega')$ ab. Folglich existiert wegen (8.30) ein $r_0 > 2$, so daß

$$u \in L^\infty(t_1, T; W^{2,r_0}(\Omega''; \mathbb{R}^N)). \tag{8.33}$$

Insbesondere impliziert (8.33) nach Anwendung des Sobolevschen Einbettungssatzes, daß ∇u auf $\Omega'' \times (t_1, T)$ wesentlich beschränkt ist.

[1)] Ein analoges Resultat wurde in [Frehse and Seregin (1999)] mit einer anderen Methode als hier bewiesen.

Seien $0 < t_1 < t_1' < t_0 < T$ und sei $B_R \subset \Omega''$ $(0 < R < \sqrt{t_1' - t_1})$ beliebig gewählt. Argumentiert man nun wie in [Naumann and Wolff, M. (1994)], so erhält man die folgende Poincaré-Ungleichung

$$\int_{Q_R} |\nabla u - (\nabla u)_{Q_R}|^2 \, dx \, dt \le c \, R^2 \int_{Q_R} |D^2 u|^2 \, dx \, dt.$$

Beachtet man (8.33), so ergibt sich nach Anwendung der Hölderschen Ungleichung

$$(8.34)\qquad \int_{Q_R} |\nabla u - (\nabla u)_{Q_R}|^2 \, dx \, dt \le$$

$$\le c \, R^{4+2(r_0-2)/r_0} \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_1,T)} \left(\int_{\Omega''} |D^2 u(\cdot,t)|^{r_0} \, dx \right)^{2/r_0},$$

wobei die Konstante c nur von $c_0/\nu_0, q, N, r_0$ und Ω'' abhängt. Hieraus folgert man, daß für beliebige $\Omega''' \subset\subset \Omega''$ gilt:

$$\nabla u \in C^{\mu,\mu/2}(\overline{\Omega''' \times (t_1', T)}; \mathbb{R}^{2N}),$$

wobei $\mu := (r_0 - 2)/r_0$) (vgl. Da Prato [Da Prato (1965)]). Somit ist der Beweis des Satzes im Fall von zwei Raumdimensionen erbracht.

(ii) *Der Fall* $n = 3$ *und* $3/2 < q < 2$. Seien $t_1 \in (0, T)$ und $\Omega' \subset\subset \Omega$ beliebig, aber fixiert. Nach Satz 8.1 existiert ein $p > 2$, so daß

$$\frac{\partial u}{\partial t}, D_\alpha u \in L^\infty(t_1, T; L^p(\Omega'; \mathbb{R}^N)) \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Wie oben betrachten wir auch hier für fast alle $t \in (t_1, T)$ das elliptische System (8.31) und erhalten nach Anwendung von Satz 4.2 mit $f := \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t)$ für belibige $\Omega'' \subset\subset \Omega'$:

$$(8.35)\qquad u(\cdot,t) \in W^{1,s_0}(\Omega''; \mathbb{R}^N) \quad \forall\, 1 \le s_0 < 6(q-1)$$

für fast alle $t \in (t_1, T)$. Die Voraussetzung $q > 3/2$ impliziert $6(q-1) > 3$, so daß man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $s_0 \in (3, 6(q-1))$ annehmen kann. Darüber hinaus zeigt man unter Verwendung der Anmerkung 4.1 die Existenz einer Zahl $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß für beliebige $\Omega'' \subset\subset \Omega'$ die folgende Abschätzung gilt:

$$(8.36)\qquad \|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^{s_0}(\Omega''; R^{3N})} \le c \left(1 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t) \right\|_{L^2(\Omega';\mathbb{R}^N)}^{2^{k_0}} + \|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega';\mathbb{R}^{3N})}^{2^{k_0}} \right)$$

für fast alle $t \in (t_1, T)$, wobei $c = \text{const}$ nicht von t, sondern nur von $c_0/\nu_0, q, N$ und $1/\operatorname{dist}(\Omega'', \partial\Omega')$ abhängt. Somit haben wir

$$u \in L^\infty(t_1, T; W^{1,s_0}(\Omega''; \mathbb{R}^N)). \tag{8.37}$$

Seien $t_1 < t_1' < t_0 < T$ und $B_R(x_0) = B_R \subset \Omega''$ $(0 < R < \sqrt{t_1' - t_1})$ beliebig gewählt. Ähnlich wie in (i) schließt man aus (8.37) mit Hilfe der Poincaré-Ungleichung (b.20) und Anwendung der Hölderschen Ungleichung

$$\int_{Q_R} |u - u_{Q_R}|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le\; c\, R^{5+q(1-3/s_0)} \operatorname*{ess\,sup}_{t \in (t_1,T)} \left(\int_{\Omega''} |\nabla u(\cdot,t)|^{s_0} \,\mathrm{d}x \right)^{q/s_0},$$

wobei $c = \text{const}$ weder von R noch von x_0 und t_0 abhängt. Die Behauptung ergibt sich nun unmittelbar aus [Da Prato (1965)]. ■

8.3 Ein Existenzsatz

Diesen Abschnitt widmen wir einem Existenzsatz, wobei wir auf die im Kapitel 5 dargelegten Aussagen zurückgreifen, und schließlich den Satz 5.12 anwenden.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$. Wir haben nun den folgenden Existenzsatz.

Satz 8.3 *Seien A_i^α $(\alpha = 1, \ldots, n; i = 1, \ldots, N)$ Koeffizienten, die den Bedingungen (8.2) und (8.3) genügen mögen. Dann gibt es zu jedem*

$$g \in {}^*H_0^{1/2}(0, T; L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)) \cap L^q(0, T; W_q^1(\Omega; \mathbb{R}^N))$$

genau eine schwache Lösung

$$u \in {}^*H_0^{1/2}(0, T; L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)) \cap L^q(0, T; W_q^1(\Omega; \mathbb{R}^N))$$

des folgenden Dirichlet-Problems:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^i}{\partial t} - D_\alpha A_i^\alpha(\nabla u) = 0 \quad \text{in} \quad Q \qquad (i = 1, \ldots, N), \\[2ex] u \;=\; g \quad \text{f.ü. in} \quad \Gamma := (\partial\Omega \times (0,T)) \cup (\Omega \times \{0\}).\,^{2)} \end{cases} \tag{8.38}$$

[2)] Mit dieser Randbedingung ist gemeint: $u - g \in H_0^{1/2}(0, T; L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)) \cap L^q(0, T; \overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega; \mathbb{R}^N))$.

Beweis. - Sei $g \in {}^*H_0^{1/2}(0,T;L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)) \cap L^q(0,T;W_q^1(\Omega;\mathbb{R}^N))$ beliebig gegeben. Unser Ziel ist es, den Satz 5.3 anzuwenden. Dazu setzen wir

$$H := L^2(\Omega;\mathbb{C}^N), \quad X := \overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega;\mathbb{C}^N).$$

Unter Verwendung der kanonischen Einbettung $\mathbb{R}^N \subset \mathbb{C}^N$ definieren wir die Operatoren $A(t) : X \to X'$ $(t \in (0,T))$ vermöge

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\langle A(t)(\xi),\, \eta\rangle \;:=\; \displaystyle\int_\Omega A_i^\alpha(\nabla\xi - \nabla g(\cdot,t)) D_\alpha \eta^i \,\mathrm{d}x \\ \operatorname{Im}\langle A(t)(\xi),\, \eta\rangle \;:=\; 0 \qquad (\xi,\eta \in X). \end{cases}$$

Wir notieren, daß die komplexen Hilbert-Räume H und X und die Operatoren $A(t)$ $(t \in (0,T))$, aufgrund der Bedingungen (8.2) und (8.3), den Anforderungen von Satz 5.12 genügen. Außerdem existiert wegen $g \in {}^*H_0^{1/2}(0,T;H)$ ein $g_0 \in H$, so daß $g - g_0 \in H_0^{1/2}(0,T;H)$. Da nun (8.38) äquivalent ist zu

$$(8.39) \qquad \begin{cases} v = u - g \\ \mathcal{A}(v) + \mathcal{B}_0(v) \;=\; -\mathcal{B}_0(g - g_0) \quad \text{in} \quad (0,T), \\ v \in H_0^{1/2}(0,T;H) \cap L^q(0,T;X), \text{ [3]} \end{cases}$$

ergibt sich die Behauptung unmittelbar aus dem Satz 5.12. ■

[3] Hier haben wir die Eigenschaft benutzt, daß man gemäß der kononischen Einbettung $\mathbb{R}^N \subset \mathbb{C}^N$, eine Funktion mit Werten im $\mathbb{R}^N$ ebenfalls als Funktion mit Werten im $\mathbb{C}^N$ auffassen kann.

Kapitel 9

Partielle Regularität

Wir behalten die Bezeichnungen der vorigen Kapitel bei und betrachten das folgende parabolische System partieller Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} - D_\alpha A_i^\alpha(x,t,u,\nabla u) = B_i(x,t,u,\nabla u) \quad \text{in} \quad Q \qquad (i=1,\dots,N). \tag{9.1}$$

Hierbei seien $A_i^\alpha, B_i : Q\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}$ $(\alpha=1,\dots,n; i=1,\dots,N)$ Carathéodory-Funktionen, die den folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{cases} |A_i^\alpha(x,t,u,\xi) - A_i^\alpha(y,s,v,\xi)| \le \\ \le \omega(|x-y|+|t-s|^{1/2}+|u-v|)(1+|\xi|^{q-1}) \\ \forall\,\{x,t,u\},\{y,s,v\}\in Q\times\mathbb{R}^N, \forall\,\xi\in\mathbb{R}^{nN}, \end{cases} \tag{9.2}$$

wobei $\omega : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ nichtfallend und beschränkt ist, so daß $\lim\limits_{t\to 0^+}\omega(t)=0$;

$$\begin{cases} \xi \mapsto A_i^\alpha(x,t,u,\xi) \quad \textit{ist differenzierbar auf } \mathbb{R}^{nN} \\ \forall\,\{x,t,u\}\in Q\times\mathbb{R}^N \quad \textit{und} \\ \{x,t,u,\xi\} \mapsto \dfrac{\partial A_i^\alpha}{\partial \xi_\beta^j}(x,t,u,\xi)\,\textit{ist stetig auf } Q\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^{nN}; \end{cases} \tag{9.3}$$

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\partial A_i^\alpha}{\partial \xi_\beta^j}(x,t,u,\xi)\right| \le c_0(1+|\xi|)^{q-2} \\ \forall\,\{x,t,u,\xi\}\in\ Q\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^{nN} \qquad (c_0=\text{const}>0) \end{cases} \tag{9.4}$$

$(\alpha, \beta = 1, \ldots, n; i, j = 1, \ldots, N)$;

$$(9.5) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial A_i^\alpha}{\partial \xi_\beta^j}(x,t,u,\xi)\eta_\alpha^i \eta_\beta^j \ \geq \ \nu_0(1+|\xi|)^{q-2}|\eta|^2 \\ \forall \{x,t,u\} \in Q \times \mathbb{R}^N, \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^{nN} \quad (\nu_0 = \text{const} > 0). \end{cases}$$

Für die rechte Seite B_i unterscheiden wir ebenfalls wie im elliptischen Fall die folgenden beiden Fälle:

a) *Kontrolliertes Wachstum*:

$$(9.6) \qquad \begin{cases} |B_i(x,t,u,\xi)| \ \leq \ c_1(1 \ + \ |u|^{q(n+2)/n-1} \ + \ |\xi|^{q-n/(n+2)}) \\ \forall \{x,t,u,\xi\} \in Q \times \mathbb{R}^{nN} \quad (c_1 = \text{const}); \end{cases}$$

b) *Natürliches Wachstum*:

$$(9.7) \qquad \begin{cases} \forall M > 0 \quad \exists\, a(M) > 0: \\ |B_i(x,t,u,\xi)| \ \leq \ a(M)|\xi|^q + b \\ \forall \{x,t,u,\xi\} \in Q \times [-M,M]^N \times \mathbb{R}^{nN} \quad (b = \text{const} \ \geq \ 0) \end{cases}$$

$(i = 1, \ldots, N)$.

In nachfolgenden Betrachtungen geht es um die Beantwortung der Frage nach der partiellen Regularität schwacher Lösungen von (9.1). Dazu die folgende

Definition 9.1 *Seien die Bedingungen* (9.2)$-$(9.4) *und* (9.6) (*bzw.* (9.7)) *erfüllt. Eine Funktion* $u \in V_q^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N)$ (*bzw.* $u \in V_q^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(Q;\mathbb{R}^N)$) *heißt* **schwache Lösung** *von* (9.1), *falls für beliebige* $\varphi \in C_c^1(Q;\mathbb{R}^N)$ *die folgende Integralidentität erfüllt ist*:

$$-\int_Q u^i \frac{\partial \varphi^i}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \ + \int_Q A_i^\alpha(x,t,u,\nabla u) D_\alpha \varphi^i \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \ =$$
$$(9.8) \qquad = \int_Q B_i(x,t,u,\nabla u)\varphi^i \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \qquad \blacksquare$$

9.1 Mittelwertabschätzungen

Sei $u \in V_q^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N)$. Für $X_0 \in Q$ und $0 < R < \operatorname{dist}(X_0, \partial Q)$ definieren wir

$$\Phi(u; X_0, R) := \frac{1}{R}\left(\fint_{Q_R} |u - u_{Q_R} - (\nabla u)_{Q_R} \cdot (x - x_0)|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right)^{1/q} + \\ + \left(\fint_{Q_R} |\nabla u - (\nabla u)_{Q_R}|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right)^{1/q},$$

$$\mathcal{M}(u; X_0, R) := \left(\fint_{t_0 - R^2}^{t_0} |u(\cdot, t)_{B_R}|^{q(n+2)/n} \,\mathrm{d}t \right)^{1/q} + \\ + \left(\fint_{Q_R} (1 + |\nabla u|^q) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right)^{1/q}.$$

Lemma 9.1 (i) *Es existiert eine Konstante* $C_0 = C_0(q, n, N, u) > 0$*, so daß für alle* $u \in V_q^{1,0}(Q; \mathbb{R}^N)$ *gilt:*

$$(9.9) \qquad \begin{cases} \left(\fint_{Q_R} (1 + |u|^{q(n+2)/n} + |\nabla u|^q) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right)^{1/q} \le C_0\, \mathcal{M}(u; X_0, R) \\ \forall\, X_0 \in Q,\ \forall\, 0 < R < \operatorname{dist}(X_0, \partial Q). \end{cases}$$

(ii) *Sei* $0 < \tau < 1$*. Es existiert eine Konstante* $\lambda_0 > 0$*, die nur von* n, q, N, u *und* τ *abhängt, so daß für alle* $u \in V_q^{1,0}(Q; \mathbb{R}^N)$ *gilt:*

$$(9.10) \qquad \begin{cases} |\mathcal{M}(u; X_0, \tau R) - \mathcal{M}(u; X_0, R)| \le \lambda_0 \Phi(u; X_0, R) \\ \forall\, X_0 \in Q,\ \forall\, 0 < R < \operatorname{dist}(X_0, \partial Q). \end{cases}$$

Beweis. - Seien $X_0 = \{x_0, t_0\}$ und $0 < R < \operatorname{dist}(X_0, \partial Q)$ beliebig, aber fixiert.

(i) Mit Hilfe der in Anmerkung 6.1 notierten Interpolationsungleichung (6.3) erhält man

$$\left(\fint_{Q_R} |u-u(\cdot,t)_{B_R}|^{q(n+2)/n}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{n/q(n+2)} \le$$
$$\le \left(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-R^2,t_0)} \fint_{B_R} |u(\cdot,t)-u(\cdot,t)_{B_R}|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/(n+2)} \times$$
$$\times \left(\fint_{t_0-R^2}^{t_0}\left(\fint_{B_R} |u-u(\cdot,t)_{B_R}|^{q^*}\,\mathrm{d}x\right)^{q/q^*}\mathrm{d}t\right)^{n/q(n+2)} \le$$
$$\le c\left(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \int_{\Omega} |u(\cdot,t)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/(n+2)}\left(\fint_{Q_R} |\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{n/q(n+2)}$$

($c=$ const unabhängig von X_0 und R).

Unter Verwendung der Dreiecksungleichung und der obigen Abschätzung bekommt man nunmehr

$$\left(\fint_{Q_R} |u|^{q(n+2)/n}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/q} \le c\left(\fint_{t_0-R^2}^{t_0} |u(\cdot,t)_{B_R}|^{q(n+2)/n}\,\mathrm{d}t\right)^{1/q} +$$
$$+\, c\left(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \int_{\Omega} |u(\cdot,t)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/n}\left(\fint_{Q_R} |\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/q} \le c\,\mathcal{M}(u;X_0,R),$$

womit die Abschätzung (9.9) bewiesen ist.

(ii) Nun sei $\tau\in(0,1)$ beliebig gewählt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $x_0=0$ annehmen. Mit einer analogen Argumentation wie im Beweis von Lemma A.5 verifiziert man zunächst

$$\left|\left(\fint_{Q_{\tau R}} (1+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/q} - \left(\fint_{Q_R} (1+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/q}\right| \le \tag{9.11}$$
$$\le c\left(\fint_{Q_R} |\nabla u-(\nabla u)_{Q_R}|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/q} \le c\,\Phi(u;X_0,R).$$

Nun definieren wir

$$\begin{cases} f(s,t) := |u(\cdot,s)_{B_{\tau R}}|^{(n+2)/n}, \\ g(s,t) := |u(\cdot,t)_{B_R}|^{(n+2)/n} \\ (\{s,t\}\in(t_0-\tau^2R^2,t_0)\times(t_0-R^2,t_0)). \end{cases}$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung, der Hölderschen Ungleichung und Anwendung der Ungleichung

$$\Big|a^{(n+2)/n} - b^{(n+2)/n}\Big| \;\leq\; \Big(a^{2/n} \,+\, b^{2/n}\Big)|a-b| \quad \forall\, a, b \geq 0$$

erhält man

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\bigg(\fint_{t_0-\tau^2R^2}^{t_0} |u(\cdot,s)_{B_{\tau R}}|^{q(n+2)/n}\,\mathrm{d}s\bigg)^{1/q} - \\
&\qquad\qquad - \bigg(\fint_{t_0-R^2}^{t_0} |u(\cdot,t)_{B_R}|^{q(n+2)/n}\,\mathrm{d}t\bigg)^{1/q}\Bigg| \leq \\
&\quad \leq \tau^{-2/q}R^{-4/q}\|f-g\|_{L^q((t_0-\tau^2R^2,t_0)\times(t_0-R^2,t_0))} \leq \qquad (9.12)\\
&\quad \leq \bigg(\fint_{t_0-\tau^2R^2}^{t_0}\fint_{t_0-R^2}^{t_0}\Big(|u(\cdot,s)_{B_{\tau R}}| + |u(\cdot,t)_{B_R}|\Big)^{2q/n} \times \\
&\qquad\qquad \times\, |u(\cdot,s)_{B_{\tau R}} - u(\cdot,t)_{B_R}|^q\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\bigg)^{1/q} \leq \\
&\quad \leq \frac{c}{R}\bigg(t \in \operatorname*{ess\,sup}_{(0,T)}\int_\Omega |u(\cdot,t)|^2\,\mathrm{d}x\bigg)^{1/n} \times \\
&\qquad\qquad \times \bigg(\fint_{t_0-\tau^2R^2}^{t_0}\fint_{t_0-R^2}^{t_0}|u(\cdot,s)_{B_{\tau R}} - u(\cdot,t)_{B_R}|^q\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\bigg).
\end{aligned}$$

Beachtet man, daß

$$\fint_{B_{\tau R}}(\nabla u)_{Q_R}\cdot y\,\mathrm{d}y \,=\, 0, \quad \fint_{B_R}(\nabla u)_{Q_R}\cdot x\,\mathrm{d}x \,=\, 0,$$

so bekommt man unter Benutzung der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
&|u(\cdot,s)_{B_{\tau R}} - u(\cdot,t)_{B_R}|^q \,= \\
&\quad = \bigg|\fint_{B_{\tau R}}\fint_{B_R}\Big(u(x,t) - (\nabla u)_{Q_R}\cdot x - u(y,s) + (\nabla u)_{Q_R}\cdot y\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\bigg|^q \leq \\
&\quad \leq c\fint_{B_{\tau R}}\fint_{B_R}|u(x,t) - (\nabla u)_{Q_R}\cdot x - u(y,s) + (\nabla u)_{Q_R}\cdot y|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

für fast alle $\{s,t\} \in (t_0-\tau^2R^2,t_0)\times(t_0-R^2,t_0)$. Nach Integration beider Seiten der soeben erhaltenen Ungleichung über den Quader $(t_0-\tau^2R^2,t_0)\times(t_0-R^2,t_0)$ und Anwendung der Dreiecksungleichung ergibt sich

$$
(9.13) \qquad \left(\fint_{t_0-\tau^2R^2}^{t_0} \fint_{t_0-R^2}^{t_0} |u(\cdot,t)_{B_{\tau R}} - u(\cdot,s)_{B_R}|^q \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \right)^{1/q} \le
$$

$$
\le c \left(\fint_{Q_R} |u - u_{Q_R} + (\nabla u)_{Q_R} \cdot x|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right)^{1/q},
$$

wobei $c = \text{const}$ nur von q, n, N und τ abhängt. Die rechte Seite der Ungleichung (9.12) kann man mit Hilfe von (9.13) weiter nach oben abschätzen. Zusammen mit (9.11) bestätigt man nun leicht die Ungleichung (9.10). ■

9.2 Partielle Regularität

Wie im elliptischen Fall sind wir in der Lage, unter ähnlichen Voraussetzungen an die Koeffizienten partielle Regularität schwacher Lösungen parabolischer Systeme zu beweisen. Hierbei verwenden wir die schon mehrmals benutzte indirekte Methode.

Anders als im elliptischen Fall läßt sich die direkte Methode zum Beweis der partiellen Regularität nicht anwenden, da die höhere Integrierbarkeit nach Gehring-Giaquinta-Modica für den Fall $1 < q < 2$ bisher nicht bekannt ist. Eine Ausnahme bildet jedoch der Fall $n = 2$, mit dem wir uns im Abschnitt 9.3 beschäftigen werden.

Satz 9.1 *Seien (9.2)–(9.6) erfüllt. Ferner setzen wir voraus, daß der Stetigkeitsmodul ω in (9.2) der folgenden Dini-Bedingung genügt:*

$$
(9.14) \qquad \int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} \,\mathrm{d}t < +\infty.
$$

Sei $u \in V_q^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung von (9.1), wobei

$$
(9.15) \qquad q > \frac{2n}{n+2}.
$$

(i) *Es existiert eine offene Menge $Q_0 \subset Q$ mit $\mathrm{mes}_{n+1}(Q \setminus Q_0) = 0$, so daß*

$$
(9.16) \qquad u\big|_{Q_0} \in C^1(Q_0;\mathbb{R}^N).
$$

(ii) *Sind die Koeffizienten A_i^α $(\alpha = 1,\dots,n; i = 1,\dots,N)$ Hölder-stetig, das heißt: es gibt Konstanten L und $\delta \in (0,1)$, so daß der Stetigkeitsmodul ω in (9.2) der Bedingung*

$$
(9.17) \qquad \omega(t) \le \min\{L, t^\delta\} \quad \forall\, t > 0
$$

genügt, so gibt es eine offene Menge $Q_0 \subset Q$ mit $\mathrm{mes}_{n+1}(Q \setminus Q_0) = 0$, so daß

(9.18) $$\nabla u\big|_{Q_0} \in C^{\gamma,\gamma/2}(Q_0;\mathbb{R}^{nN}) \quad \textit{für ein } \gamma \in (0,1). \qquad \blacksquare$$

Zunächst notieren wir eine Abschätzung, die wir in den nachfolgenden Betrachtungen wiederholt anwenden werden. Diese stellt eine unmittelbare Folgerung der Abschätzung (b.27) dar.

Lemma 9.2 *Seien die Bedingungen* (9.2), (9.4) *und* (9.6) *erfüllt. Sei* $u \in V_q^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N)$ *eine schwache Lösung des Systems* (9.1). *Dann ist für jedes* $p \in [1,+\infty)$ *und für beliebige Teilzylinder* $Q_R \subset Q$ *die folgende Abschätzung gültig*:

(9.19) $$\left(\fint_{Q_R} [\omega(|x-x_0| + |t-t_0+R^2|^{1/2} + |u-u_{Q_R}|)]^p \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/p} \leq \\ \leq \omega(3\sqrt{R}) \,+\, c\,R^{q/2p}\mathcal{M}(u;X_0,R)^{q^2/p},$$

wobei $c = \text{const} > 0$ *nur von* n, N, p, q *und* $\sup\limits_{t\le 0}\omega(t)$ *abhängt.*

Beweis. - Da u der Integralidentität (9.8) genügt, erhält man unter Berücksichtigung der Bedingungen (9.2), (9.4) und (9.6) nach Anwendung von (b.27) die Abschätzung

$$\left(\fint_{Q_R} [\omega(|x-x_0| + |t-t_0+R^2|^{1/2} + |u-u_{Q_R}|)]^p \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/p} \leq \\ \leq \omega(3\sqrt{R}) \,+\, c\,R^{q/2p}\left(1 + \fint_{Q_R} (|\nabla u|^q + |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{q/p} \leq \\ \leq \omega(3\sqrt{R}) \,+\, c\,R^{q/2p}\left(\fint_{Q_R} (1 + |u|^{q(n+2)/n} + |\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{q/p}.$$ [1]

Die Behauptung (9.19) ergibt sich somit aus der letzten Abschätzung nach Anwendung von (9.9) (siehe Lemma 9.1). ■

Eine zentrale Rolle beim Beweis von Satz 9.1 spielen, ähnlich wie beim Beweis von Satz 3.3, fundamentale Abschätzungen, die man mit Hilfe einer indirekten Methode herleitet. Genügt der Stetigkeitsmodul ω der Koeffizienten A_i^α der Dini-Bedingung (9.14), so gibt es nach Lemma A.9 eine nichtwachsende Funktion $\gamma : (0,1] \to (0,+\infty)$ mit $\lim\limits_{t\to 0^+} \gamma(t) = +\infty$, so daß

$$\omega_0(t) := \gamma(t)\omega(3\sqrt{t}) \,+\, t^{(q-1)/4} \quad (t \in (0,1])$$

[1] Hier bezeichne $\mathbf{A}$ die Koeffizientenmatrix $\{A_{ij}^{\alpha\beta}\}$ und $\mathbf{B}$ den Vektor $\{B_1,\dots,B_N\}$.

nichtfallend ist, und ebenfalls der Dini-Bedingung (9.14) genügt. Wir haben nun das folgende Hauptlemma:

Lemma 9.3 *Sei* $u \in V_q^{1,0}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ *eine schwache Lösung des Systems* (9.1) *und seien die Bedingungen* (9.2)–(9.6), (9.14) *sowie* (9.15) *erfüllt. Dann gibt es für alle* $\tau \in (0,\frac{1}{2})$ *und* $M > 0$ *eine positive Konstante* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\tau, M)$, *so daß die Ungleichung*

$$(9.20)\qquad \Phi(u;X_0,\tau R) \leq 2A\tau(\Phi(u;X_0,R)+\omega_0(R))\,^{2)}$$

für all diejenigen $X_0 \in Q$ *und* $0 < R < \operatorname{dist}(X_0,\partial Q)$ *gilt, für welche die Bedingung*:

$$(9.21)\qquad \Phi(u;X_0,R)+\omega_0(R) \leq \varepsilon_0 \quad \textit{und} \quad \mathcal{M}(u;X_0,R) \leq M$$

erfüllt ist.

Beweis. - Wir führen den Beweis indirekt. Wir nehmen also an, es gibt Zahlen $\tau \in (0,\frac{1}{2})$ und $0 < M < +\infty$, so daß die Aussage des Lemmas falsch ist. Dann existieren

1) eine Folge (X_m) von Punkten aus Q,

2) zwei Nullfolgen (ε_m) und (R_m) $(0 < R_m < \operatorname{dist}(X_m,\partial Q))$ positiver reeller Zahlen,

so daß für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(9.22)\qquad \Phi(u;X_m,R_m)+\omega_0(R_m) = \varepsilon_m, \quad \mathcal{M}(u;X_m,R_m) \leq M,$$

$$(9.23)\qquad \Phi(u;X_m,\tau R_m) > 2A\tau(\Phi(u;X_m,R_m)+\omega_0(R_m)).$$

Nun setzen wir

$$\begin{aligned}
\lambda_m &:= (\nabla u)_{Q_{R_m}} \\
v_m(y,s) &:= \frac{u(x_m+R_m y, t_m+R_m^2 s)-u_{Q_{R_m}}-R_m\lambda_m\cdot y}{\varepsilon_m R_m}, \\
A_{ij(m)}^{\alpha\beta}(y,s) &:= \int_0^1 \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial \xi_\beta^j}(x_m+R_m y, t_m+R_m^2 s, u(x_m+R_m y,t_m+R_m^2 s), \\
&\qquad\qquad t\varepsilon_m\nabla v_m(y)+\lambda_m)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

$(\{y,s\} \in Q_1(0))$ $(\alpha,\beta = 1,\dots,n; i,j=1,\dots,N;\ m \in \mathbb{N})$.

Aus (9.22) und (9.23) folgt unter Verwendung der Transformationsformel für das Lebesgue-Integral

---
2) A gemäß (7.18) (vgl. Folgerung 7.2).

$$(9.24)\qquad \max\left\{\left(\fint_{Q_1}(1+|\varepsilon_m\nabla v_m+\lambda_m|^q)\,\mathrm{d}y\right)^{1/q},|\lambda_m|,|u_{Q_{R_m}}|\right\}\le M,$$

$$(9.25)\qquad \Phi(v_m;0,1)+\frac{\omega_0(R_m)}{\varepsilon_m}=1,$$

$$(9.26)\qquad \Phi(v_m;0,\tau)>2A\tau\left\{\Phi(v_m;0,1)+\frac{\omega_0(R_m)}{\varepsilon_m}\right\}=2A\tau.$$

Darüber hinaus erhalten wir aus (9.8) mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$(9.27)\qquad \begin{cases} -\displaystyle\int_{Q_1} v_m^i\frac{\partial\varphi^i}{\partial t}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s+\int_{Q_1}A_{ij(m)}^{\alpha\beta}D_\beta v_m^j D_\alpha\varphi^i\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s=\\ =\displaystyle\frac{1}{\varepsilon_m}\int_{Q_1}A_i^\alpha(x_m+R_my,t_m+R_m^2s,u(x_m+R_my,t_m+R_m^2s),\lambda_m)-\\ \qquad\qquad -A_i^\alpha(x_m,t_m-R_m^2,u_{Q_{R_m}},\lambda_m)D_\alpha\varphi^i\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s+\\ \quad+\displaystyle\frac{R_m}{\varepsilon_m}\int_{Q_1}B_i(x_m+R_my,t_m+R_m^2s,u(x_m+R_my,t_m+R_m^2s),\\ \qquad\qquad\qquad\varepsilon_m\nabla v_m+\lambda_m)\varphi^i\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s\\ \forall\,\varphi\in C_c^1(Q_1;\mathbb{R}^N)\qquad (m\in\mathbb{N}). \end{cases}$$

Die Gleichung (9.25) impliziert sofort

$$(9.28)\qquad \|v_m\|_{W_q^{1,0}(Q_1;\mathbb{R}^N)}\le 1.$$

1°) Indem man ggf. zu einer Teilfolge übergeht, verifiziert man nun die folgenden Konvergenzeigenschaften

$$(9.29)\qquad X_m\to X_*\quad\text{in}\quad\mathbb{R}^{n+1},\quad u_{Q_{R_m}}\to u_*\quad\text{in}\quad\mathbb{R}^N,\quad \lambda_m\to\lambda_*\quad\text{in}\quad\mathbb{R}^{nN},$$

$$(9.30)\qquad v_m\rightharpoonup v\quad\text{in}\quad W_q^{1,0}(Q_1;\mathbb{R}^N),$$

$$(9.31)\qquad \varepsilon_m(D_\alpha v_m)(y,s)\to 0\quad\text{ffa. }\{y,s\}\in Q_1,$$

$$(9.32)\qquad A_{ij(m)}^{\alpha\beta}(y,s)\to A_{ij(*)}^{\alpha\beta}\quad\text{ffa. }\{y,s\}\in Q_1,$$

$$(9.33)\qquad A_{ij(m)}^{\alpha\beta}\to A_{ij(*)}^{\alpha\beta}\quad\text{in}\quad L^{q'}(Q;\mathbb{R}^N)$$

für $m\to+\infty$, wobei

$$A_{ij(*)}^{\alpha\beta}:=\frac{\partial A_i^\alpha}{\partial\xi_\beta^j}(X_*,u_*,\lambda_*)=\text{const}$$

$(\alpha,\beta=1,\dots,n;i,j=1,\dots,N)$.

In der Tat, (9.29) folgt aus der Beschränktheit der Folgen $(X_m), (u_{Q_{R_m}})$, (λ_m) in den entsprechenden endlichdimensionalen Räumen. Wegen der Reflexivität des Raumes $W_q^{1,0}(Q_1;\mathbb{R}^N)$ folgt (9.30) aus (9.28). Verwendet man die Tatsache, daß $\varepsilon_m(D_\alpha v_m)$ bezüglich der $L^q(Q_1;\mathbb{R}^N)$-Norm gegen 0 konvergiert, so ergibt sich (9.31) nach Anwendung des Satzes von Riesz-Fischer. Die Behauptung (9.32) beweist man leicht unter Berücksichtigung von (9.3) mit Hilfe von (9.29) und (9.31). Da die Funktionen $A^{\alpha\beta}_{ij(m)}$ gleichmäßig beschränkt sind, erhalten wir schließlich (9.33) aus (9.32) nach Anwendung des Konvergenzsatzes von Lebesgue.

2°) *Beschränktheit der Folge* (v_m) *in* $V_q^{1,0}(Q_\sigma;\mathbb{R}^N)$ $(0<\sigma<1)$: Sei $s_1 \in (-1,0)$ beliebig fixiert. Unter Einführung des Steklov-Mittels ergibt sich aus (9.27) die folgende Lokalisierung:

$$
(9.34)\quad \begin{cases}
\displaystyle\int_{B_1} \frac{\partial (v_m^i)_\lambda}{\partial t}(\cdot,s)\psi^i \,\mathrm{d}y + \int_{B_1} \Big(A^{\alpha\beta}_{ij(m)} D_\beta v_m^j\Big)_\lambda(\cdot,s) D_\alpha\psi^i \,\mathrm{d}y = \\
\displaystyle = \frac{1}{\varepsilon_m}\int_{B_1}\Big(A_i^\alpha(x_m+R_m y, t_m+R_m^2 s, u(x_m+R_m y, t_m+R_m^2 s),\lambda_m) - \\
\displaystyle\qquad\qquad - A_i^\alpha(x_m, t_m-R_m^2, u_{Q_{R_m}},\lambda_m)\Big)_\lambda(\cdot,s) D_\alpha\psi^i \,\mathrm{d}y + \\
\displaystyle\quad + \frac{R_m}{\varepsilon_m}\int_{B_1} B_i(x_m+R_m y, t_m+R_m^2 s, u(x_m+R_m y, t_m+R_m^2 s), \\
\displaystyle\qquad\qquad\qquad \varepsilon_m\nabla v_m+\lambda_m)_\lambda(\cdot,s)\psi^i \,\mathrm{d}y \\
\text{ffa. } s\in(-1,s_1),\ \forall\, 0<\lambda<-s_1,\ \forall\,\psi\in \overset{\circ}{W}{}^1_q(B_1;\mathbb{R}^N).
\end{cases}
$$

Nun sei $\sigma \in (0,-s_1)$ fixiert. Seien $\sigma \le \sigma_1 < \sigma_2 \le 1$ beliebig gewählt. Sei $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine Schnittfunktion, so daß $\zeta \equiv 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus B_{\sigma_2}$, $\zeta \equiv 1$ auf B_{σ_1} und $0 \le \zeta \le 1$, $|\nabla\zeta| \le \dfrac{c(n)}{\sigma_2-\sigma_1}$ in $\mathbb{R}^n$. Überdies sei $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$, so daß $\rho \equiv 0$ auf $(-\infty,-\sigma_2^2]$, $\rho \equiv 1$ auf $[-\sigma_1^2,+\infty)$ und $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \rho' \le \dfrac{2}{\sigma_2^2-\sigma_1^2}$ in $\mathbb{R}$. In (9.34) setzen wir für fast alle $s \in (-1,s_1)$ die zulässige Testfunktion

$$
\psi(y) = (v_m)_\lambda(y,s)\zeta^2(y)\rho(s) \quad (y\in B_1;\ 0<\lambda<-s_1)
$$

ein, integrieren über das Intervall $(-1,s')$ $(s' \in (-1,s_1))$ und führen anschließend den Grenzübergang $\lambda \to 0$ aus. Hiermit folgt unter Beachtung von (9.5)

$$
\frac{1}{2}\int_{B_1} |v_m(\cdot,s')|^2\zeta^2(y)\,\mathrm{d}y\rho(s') + \\
+\nu_0\int_{-1}^{s'}\int_{B_1}(1+|\varepsilon_m\nabla v_m+\lambda_m|)^{q-2}|\nabla v_m|^2\zeta^2\rho\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \le
$$

$$
\begin{aligned}
(9.35)\quad &\le -2\int_{-1}^{s'}\int_{B_1} A^{\alpha\beta}_{ij(m)}(D_\beta v^j_m)v^i_m(D_\alpha\zeta)\zeta\rho\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s+\\
&+\frac{1}{\varepsilon_m}\int_{-1}^{s'}\int_{B_1}(A^\alpha_i(x_m+R_my,t_m+R_m^2s,u(x_m+R_my,t_m+R_m^2s),\lambda_m)-\\
&\qquad -A^\alpha_i(x_m,t_m-R_m^2,u_{Q_{R_m}},\lambda_m))(D_\alpha v^i_m)\zeta^2\rho\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s+\\
&+\frac{2}{\varepsilon_m}\int_{-1}^{s'}\int_{B_1}(A^\alpha_i(x_m+R_my,t_m+R_m^2s,u(x_m+R_my,t_m+R_m^2s),\lambda_m)-\\
&\qquad -A^\alpha_i(x_m,t_m-R_m^2,u_{Q_{R_m}},\lambda_m))v^i_m(D_\alpha\zeta)\zeta\rho\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s+\\
&+\frac{R_m}{\varepsilon_m}\int_{-1}^{s'}\int_{B_1} B_i(x_m+R_my,t_m+R_m^2s,u(x_m+R_my,t_m+R_m^2s),\\
&\qquad\qquad \varepsilon_m\nabla v_m+\lambda_m)v^i_m\zeta^2\rho\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s-\\
&-2\int_{-1}^{s'}\int_{B_1}|v_m|^2\zeta^2\rho'\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s\;=\;I_1+\dots+I_5.
\end{aligned}
$$

(i) Wir beginnen mit der Abschätzung des Integrals I_1. Dazu verwenden wir die Bedingung (9.4) und die Youngsche Ungleichung. Hieraus folgt

$$
\begin{aligned}
I_1\;\le\;&\frac{c}{(\sigma_2-\sigma_1)^2}\int_{Q_{\sigma_2}}|v_m|^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s+\\
&+\frac{\nu_0}{2}\int_{-1}^{s'}\int_{B_1}(1+|\varepsilon_m\nabla v_m+\lambda_m|)^{q-2}|\nabla v_m|^2\zeta^2\rho\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

(ii) Beachtet man (9.2), so folgt mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung

$$
\begin{aligned}
I_2\;\le\;&\frac{c}{\varepsilon_m}\left(\fint_{Q_{R_m}}\omega(|x-x_m|+|t-t_m+R_m^2|^{1/2}+|u-u_{Q_{R_m}}|)^{q'}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/q'}\times\\
&\times(1+|\lambda_m|)^{q-1}\left(\int_{Q_1}|\nabla v_m|^q\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s\right)^{1/q}.
\end{aligned}
$$

Hieraus ergibt sich nach Anwendung von Lemma 9.2 unter Berücksichtigung von (9.24) und (9.25)

$$I_2 \le \frac{c\,M^{q-1}}{\varepsilon_m}(\omega(3\sqrt{R_m}) + R_m^{(q-1)/2}\mathcal{M}(u;X_m,R_m)^{q(q-1)}) \le$$
$$\le c\,M^{q^2-1}\Big[\frac{1}{\gamma(R_m)} + R_m^{(q-1)/4}\Big].$$

(iii) Ähnlich wie in (ii) erhält man

$$I_3 \le \frac{c\,M^{q^2-1}}{(\sigma_2-\sigma_1)}\Big[\frac{1}{\gamma(R_m)} + R_m^{(q-1)/4}\Big].$$

(iv) Beachtet man (9.6) so ergibt sich mit Hilfe von Lemma 9.1

$$I_4 \le \frac{c\,R_m}{\varepsilon_m}\fint_{Q_{R_m}}(1+|u|^{q(n+2)/n}+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le c\,R_m^{(q-1)/4}M^q.$$

(v) Schließlich findet man elementar

$$I_5 \le \frac{c}{(\sigma_2-\sigma_1)^2}\int_{Q_{\sigma_2}}|v_m|^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s.$$

Nun folgt aus (9.35) nach Einsetzen der soeben gewonnenen Abschätzungen der Integrale $I_1,\dots,I_5$, wegen der Beschränktheit der Folgen $(v_m),(D_\alpha v_m)\,(\alpha=1,\dots,n)$ in $L^q(Q_1,\mathbb{R}^N)$ die Existenz positiver Konstanten C_1,C_2,C_3, die weder von $m\in\mathbb{N}$ noch von σ_1 und σ_2 abhängen, so daß

$$\text{(9.36)}\qquad \operatorname*{ess\,sup}_{s\in(-\sigma_1^2,0)}\int_{B_{\sigma_1}}|v_m(\cdot,s)|^2\,\mathrm{d}y + \nu_0\int_{Q_{\sigma_1}}(1+|\varepsilon_m\nabla v_m+\lambda_m|)^{q-2}|\nabla v_m|^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \le$$
$$\le \frac{C_1}{(\sigma_2-\sigma_1)^2}\int_{Q_{\sigma 2}}|v_m|^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s + \frac{C_2}{\sigma_2-\sigma_1} + C_3.$$

Wie man sich leicht klarmacht, impliziert die Bedingung (9.15)

$$\frac{q(n+2)}{n} > 2.$$

Nach Anwendung der Hölderschen Ungleichung und (6.2) (vgl. Anmerkung 6.1) bekommt man

$$\text{(9.37)}\qquad \int_{Q_{\sigma_2}}|v_m|^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \le$$
$$\le c\Big(\operatorname*{ess\,sup}_{s\in(-\sigma_2^2,0)}\int_{B_{\sigma_2}}|v_m(\cdot,s)|^2\,\mathrm{d}y\Big)^{\frac{2}{n+2}}\Big(\|v_m\|_{L^q(Q_1;\mathbb{R}^N)}+\|\nabla v_m\|_{L^q(Q_1;\mathbb{R}^{nN})}\Big)^{\frac{2n}{n+2}}.$$

Kombiniert man (9.36) und (9.37) und benutzt man außerdem noch die Youngsche Ungleichung, so findet man Konstanten C_4 und C_5 (unabhängig von σ_1, σ_2 und $m \in \mathbb{N}$), so daß

$$\operatorname*{ess\,sup}_{s\in(-\sigma_1^2,0)} \int_{B_{\sigma_1}} |v_m(\cdot,s)|^2 \,\mathrm{d}y \,+\, \nu_0 \int_{Q_{\sigma_1}} (1+|\varepsilon_m \nabla v_m + \lambda_m|)^{q-2} |\nabla v_m|^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \,\leq$$

$$\leq \frac{C_4}{(\sigma_2-\sigma_1)^{2(n+2)/n}} + C_5 + \frac{1}{2} \operatorname*{ess\,sup}_{s\in(-\sigma_2^2,0)} \int_{B_{\sigma_2}} |v_m(\cdot,s)|^2 \,\mathrm{d}y. \tag{9.38}$$

Die Ungleichung (9.38) impliziert nach Anwendung von Lemma A.3

$$\begin{aligned} \operatorname*{ess\,sup}_{s\in(-\sigma^2,0)} \int_{B_{\sigma}} |v_m(\cdot,s)|^2 \,\mathrm{d}y \,+ \int_{Q_{\sigma}} (1+|\varepsilon_m \nabla v_m + \lambda_m|)^{q-2} |\nabla v_m|^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \,\leq \\ \leq \frac{C}{(1-\sigma)^{2(n+2)/n}}, \end{aligned} \tag{9.39}$$

wobei $C = \mathrm{const}$ nicht von $m \in \mathbb{N}$ abhängt. Somit ist (v_m) eine in $V_q^{1,0}(Q_\sigma, \mathbb{R}^N)$ beschränkte Folge. Nach Anmerkung 6.1 ist die Folge (v_m) auch in $L^{q(n+2)/n}(Q_\sigma; \mathbb{R}^N)$ beschränkt.

3°) Seien $1/2 < \sigma < \sigma_0 < 1$ beliebig, aber fixiert und sei $0 < h < \sigma^2$. Sei $\zeta \in C_c^\infty(B_{\sigma_0})$ eine geeignete Schnittfunktion für die Kugel B_σ. Dann setzen wir für fast alle $s \in (-\sigma^2, -h)$ in (9.34) (mit $\lambda = h$) die zulässige Testfunktion

$$\psi(y) \,=\, (\Delta_h v_m)(y,s)\zeta^2(y) \quad (y \in B_1)\,^{3)}$$

ein und integrieren über das Intervall $(-\sigma^2, -h)$. Dies impliziert

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h}\int_{-\sigma^2}^{-h}\int_{B_1} |\Delta_h v_m|^2 \zeta^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \,= \\ &= -\int_{-\sigma^2}^{-h}\int_{B_1} \Big(A_{ij(m)}^{\alpha\beta} D_\beta v_m^j\Big)_h (\Delta_h D_\alpha v_m^i)\zeta^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s - \\ &\quad -2\int_{-\sigma^2}^{-h}\int_{B_1} \Big(A_{ij(m)}^{\alpha\beta} D_\beta v_m^j\Big)_h (\Delta_h v_m^i)(D_\alpha \zeta)\zeta \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s + \end{aligned} \tag{9.40}$$

3) Hier bezeichne $\Delta_h v_m$ die Zeitdifferenz der Funktion v_m (siehe auch in Abschnitt 6.1).

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{\varepsilon_m}\int_{-\sigma^2}^{-h}\int_{B_1}\Big(A_i^\alpha(x_m+R_m y,t_m+R_m^2 s,u(x_m+R_m y,t_m+R_m^2 s),\lambda_m)-\\
&\qquad -A_i^\alpha(x_m,t_m-R_m^2,u_{Q_{R_m}},\lambda_m)\Big)_h(D_\alpha\Delta_h v_m^i)\zeta^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s+\\
&+\frac{2}{\varepsilon_m}\int_{-\sigma^2}^{-h}\int_{B_1}\Big(A_i^\alpha(x_m+R_m y,t_m+R_m^2 s,u(x_m+R_m y,t_m+R_m^2 s),\lambda_m)-\\
&\qquad -A_i^\alpha(x_m,t_m-R_m^2,u_{Q_{R_m}},\lambda_m)\Big)_h(\Delta_h v_m^i)(D_\alpha\zeta)\zeta\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s+
\end{aligned}
$$

$$+\frac{R_m}{\varepsilon_m}\int_{-\sigma^2}^{-h}\int_{B_1} B_i(x_m+R_my,t_m+R_m^2s,u(x_m+R_my,t_m+R_m^2s),$$

$$\varepsilon_m\nabla v_m+\lambda_m)_h(\Delta_h v_m^i)\zeta^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s\;=$$

$$=\;J_1+J_2+J_3+J_4+J_5$$

$(m\in\mathbb{N})$.

(i) Der Übersichtlichkeit halber setzen wir

$$\begin{cases} V_m(x,t) := (1+|\varepsilon_m\nabla v_m(x,t)+\lambda_m|),\\ V_{m,h}(x,t) := (1+|\varepsilon_m\nabla v_m(x,t)+\lambda_m|+|\varepsilon_m\nabla v_m(x,t+h)+\lambda_m|)\\ (\{x,t\}\in B_1\times(-1,-h)). \end{cases}$$

Unter Berücksichtigung von (9.4) und Anwendung der Hölderschen und Youngschen Ungleichung schließt man

$$\begin{aligned} J_1 \;&\leq\; c\int_{-\sigma^2}^{-h}\int_{B_{\sigma_0}} (V_m^{q-2}|\nabla v_m|)_h|\Delta_h\nabla v_m|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s\;\leq\\ &\leq\; c\int_{-\sigma^2}^{-h}\int_{B_{\sigma_0}} (V_m^{q-2}|\nabla v_m|)_h^2 V_{m,h}^{2-q}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s\;+\;c\int_{-\sigma^2}^{-h}\int_{B_{\sigma_0}} V_{m,h}^{q-2}|\Delta_h\nabla v_m|^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s\;\leq\\ &\leq\; c\int_{-\sigma^2}^{-h}\int_{B_{\sigma_0}} (V_m^{q-2}|\nabla v_m|)_h^2 (V_{m,h}^{(q-2)}V_{m,h}^2)^{\frac{2-q}{q}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s + c\int_{Q_{\sigma_0}} V_m^{q-2}|\nabla v_m|^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s\leq\\ &\leq\; c\,\varepsilon_m^{\frac{2-q}{q-1}}\int_{Q_{\sigma_0}} V_m^{q'(q-2)}|\nabla v_m|^{q'}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s\;+\;c\int_{Q_{\sigma_0}} V_m^{q-2}|\nabla v_m|^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s\;\leq\\ &\leq\; c\int_{Q_{\sigma_0}} (1+|\varepsilon_m\nabla v_m+\lambda_m|)^{q-2}|\nabla v_m|^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

(ii) Beachtet man (9.4) und benutzt man die Youngsche Ungleichung und anschließend die Höldersche Ungleichung, so erhält man

$$\begin{aligned} J_2 \;\leq\; &\frac{c}{(\sigma_0-\sigma)^2}\int_{Q_{\sigma_0}} |v_m|^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s+\\ &+\;c\int_{Q_{\sigma_0}} (1+|\varepsilon_m\nabla v_m+\lambda_m|)^{q-2}|\nabla v_m|^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

(iii) Für die Abschätzung des Integrals J_3 geht man analog wie bei der Abschätzung des Integrals I_2 vor. Unter Verwendung der Bedingung (9.2) und der Ungleichung (9.19) bekommt man

$$J_3 \le \frac{c}{\varepsilon_m}\Big(⨍_{Q_{R_m}} \omega\Big(|x-x_m| + |t-t_m+R_m^2|^{1/2} + |u-u_{Q_{R_m}}|\Big)^{q'} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{1/q'} \times$$

$$\times\,(1+|\lambda_m|)^{q-1}\Big(\int_{Q_1} |\nabla v_m|^q \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s\Big)^{1/q} \le$$

$$\le c\,M^{q^2-1}\Big[\frac{1}{\gamma(R_m)} + R_m^{(q-1)/4}\Big].$$

(iv) Mit einer analogen Argumentation, die für die Abschätzung von J_3 benutzt wurde, findet man

$$J_4 \le \frac{c\,M^{q^2-1}}{\sigma_0-\sigma}\Big[\frac{1}{\gamma(R_m)} + R_m^{(q-1)/4}\Big].$$

(v) Beachtet man die Bedingung (9.6), so bestätigt man leicht

$$J_5 \le c\,R_m^{(q-1)/4} M^q.$$

Aus den obigen Abschätzungen folgt die Existenz einer von $m \in \mathbb{N}$ unabhängigen Konstanten C_6, derart daß

$$J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 \le C_6, \tag{9.41}$$

und nach Kombination von (9.41) und (9.40) erhalten wir

$$\int_{-\sigma^2}^{-h}\int_{B_\sigma} |v_m(y,s+h) - v_m(y,s)|^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \le C_6 h \quad \forall\, 0<h<\sigma^2, \tag{9.42}$$

wobei C_6 eine von h und $m \in \mathbb{N}$ unabhängige Konstante ist. Dies zeigt, daß die Folge (v_m) in $H^\theta(-\sigma^2, 0, L^2(B_\sigma;\mathbb{R}^N))$ für jedes $\theta \in (0,\frac{1}{2})$ beschränkt ist. Beachtet man außerdem (9.28), so bestätigt man unter Verwendung von Satz B.4, daß die Folge (v_m) in $L^2(Q_\sigma;\mathbb{R}^N)$ präkompakt ist. Da wegen (9.30) der Grenzwert einer konvergenten Teilfolge eindeutig bestimmt ist, folgt

$$v_m \to v \quad \text{in} \quad L^2(Q_\sigma;\mathbb{R}^N) \quad \text{für} \quad m \to +\infty. \tag{9.43}$$

4°) Sei $\varphi \in C_c^1(Q_1;\mathbb{R}^N)$. Mit Hilfe von (9.30) und (9.33) erhalten wir ähnlich wie beim Beweis von Satz 3.3

$$\begin{cases} -\displaystyle\int_{Q_1} v_m^i \frac{\partial \varphi^i}{\partial t}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}s \,+\, \int_{Q_1} A_{ij(m)}^{\alpha\beta} D_\beta v_m^j D_\alpha \varphi^i\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}s \\ \to -\displaystyle\int_{Q_1} v^i \frac{\partial \varphi^i}{\partial t}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}s \,+\, \int_{Q_1} A_{ij(*)}^{\alpha\beta} D_\beta v^j D_\alpha \varphi^i\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}s \quad \text{für} \quad m \to +\infty \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon_m} \displaystyle\int_{Q_1} (A_i^\alpha(x_m + R_m y, t_m + R_m^2 s, u(x_m + R_m y, t_m + R_m^2 s), \lambda_m) - \\ \qquad\qquad - A_i^\alpha(x_m, t_m - R_m^2, u_{Q_{R_m}}, \lambda_m)) D_\alpha \varphi^i\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}s + \\ + \dfrac{R_m}{\varepsilon_m} \displaystyle\int_{Q_1} B_i(x_m + R_m y, t_m + R_m^2 s, u(x_m + R_m y, t_m + R_m^2 s), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \varepsilon_m \nabla v_m + \lambda_m) \varphi^i\, \mathrm{d}y \\ \to 0 \quad \text{für} \quad m \to +\infty. \end{cases}$$

Folglich gilt für alle $\varphi \in C_{\mathrm{c}}^1(Q_1; \mathbb{R}^N)$

$$-\int_{Q_1} v^i \frac{\partial \varphi^i}{\partial t}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}s \,+\, \int_{Q_1} A_{ij(*)}^{\alpha\beta} D_\beta v^j D_\alpha \varphi^i\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}s \,=\, 0. \tag{9.44}$$

Da die konstanten Koeffizienten $A_{ij(*)}^{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, n; i, j = 1, \ldots, N)$ den Anforderungen von Folgerung 7.2 genügen, bekommt man

$$\Phi(v; 0, \tau) \,\le\, A\tau \Phi(v; 0, 1). \tag{9.45}$$

Wie wir weiter unten zeigen werden, gilt außerdem

$$\lim_{m \to \infty} \Phi(v_m; 0, \tau) = \Phi(v; 0, \tau). \tag{9.46}$$

Unter Berücksichtigung der Unterhalbstetigkeit der Norm können wir nun in (9.26) den Grenzübergang $m \to +\infty$ durchführen, und erhalten

$$\begin{aligned} 2A\Phi(v; 0, 1) \,&\le\, \liminf_{m \to \infty} 2A\tau \Phi(v_m; 0, 1) \,\le \\ &\le\, \lim_{m \to \infty} \Phi(v_m; 0, \tau) = \Phi(v; 0, \tau). \end{aligned}$$

Dies ist jedoch wegen $\Phi(v; 0, \tau) > 0$ ein Widerspruch zu (9.45). Also ist die Annahme falsch, womit die Behauptung des Lemmas bewiesen ist.

5°) Es bleibt also nur noch, die Konvergenzeigenschaft (9.46) zu zeigen. Sei $0 < \delta < \tau$ beliebig gewählt. Ähnlich wie im Beweis von Satz 3.3 findet man nach Kombination von (9.27) und (9.44) unter Benutzung des Steklov-Mittels

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\int_{B_1} \frac{\partial}{\partial t}(v_m^i - v^i)_\lambda(\cdot, s)\psi^i \,\mathrm{d}y + \\
&\qquad + \int_{B_1} (A_{ij(m)}^{\alpha\beta}(D_\beta v_m^j - D_\beta v^j))_\lambda(\cdot, s) D_\alpha \psi^i \,\mathrm{d}y \;= \\
&= \int_{B_1} \Big(\Big[A_{ij(m)}^{\alpha\beta} - A_{ij(*)}^{\alpha\beta}\Big] D_\beta v^j\Big)_\lambda (\cdot, s) D_\alpha \psi^i \,\mathrm{d}y + \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon_m} \int_{B_1} (A_i^\alpha(x_m + R_m y, t_m + R_m^2 s, u(x_m + R_m y, t_m + R_m^2 s), \lambda_m) - \\
&\qquad\qquad - A_i^\alpha(x_m, t_m - R_m^2, u_{Q_{R_m}}, \lambda_m))_\lambda(\cdot, s) D_\alpha \psi^i \,\mathrm{d}y + \\
&\quad + \frac{R_m}{\varepsilon_m} \int_{B_1} B_i(x_m + R_m y, t_m + R_m^2 s, u(x_m + R_m y, t_m + R_m^2 s), \\
&\qquad\qquad\qquad \varepsilon_m \nabla v_m + \lambda_m)_\lambda(\cdot, s)\psi^i \,\mathrm{d}y \\
&\text{ffa. } s \in (-\tau, -\delta), \ \forall\, 0 < \lambda < \delta, \ \forall\, \psi \in \overset{\circ}{W}{}_q^1(B_1; \mathbb{R}^N),
\end{aligned}
\right.
\tag{9.47}
$$

$(m \in \mathbb{N})$.

Sei $\zeta \in C_c^\infty(B_1)$ eine Schnittfunktion, so daß $0 \leq \zeta \leq 1$ in B_1, $\zeta \equiv 0$ auf $B_1 \setminus B_{1/2}$ und $\zeta \equiv 1$ auf B_τ. Ferner sei $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$, so daß $0 \leq \rho \leq 1$ in $\mathbb{R}$, $\rho \equiv 0$ in $(-\infty, -1/2)$ und $\rho \equiv 1$ auf $(-\tau, +\infty)$. Sei $0 < \lambda < \delta$ beliebig gewählt. In (9.47) setzen wir die zulässige Testfunktion $\psi(y) = (v_m - v)_\lambda(y, s)\zeta^2(y)\rho(s)$ $(y \in B_1, s \in (-1, -\delta))$ ein, integrieren über das Intervall $(-1, s')$ $(s' \in (-1, -\delta))$ und verwenden partielle Integration. Anschließend führen wir den Grenzübergang $\lambda \to 0$ durch. Hieraus folgt unter Beachtung von (9.5)

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_{B_1} |(v_m - v)(\cdot, s')|^2 \zeta^2 \rho(s') \,\mathrm{d}x + \\
&\quad + \nu_0 \int_{-1}^{s'} \int_{B_1} (1 + |\varepsilon_m \nabla v_m + \lambda_m|)^{q-2} |\nabla v_m - \nabla v|^2 \zeta^2 \rho \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}s \;\leq \\
&\leq\; -2 \int_{-1}^{s'} \int_{B_1} A_{ij(m)}^{\alpha\beta}(D_\beta v_m^j - D_\beta v^j)(v_m^i - v^i)(D_\alpha \zeta)\zeta \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}s + \\
&\quad + \int_{-1}^{s'} \int_{B_1} \Big[A_{ij(m)}^{\alpha\beta} - A_{ij(*)}^{\alpha\beta}\Big] D_\beta v^j (D_\alpha v_m^i - D_\alpha v^i)\zeta^2 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}s + \\
&\quad + \int_{-1}^{s'} \int_{B_1} \Big[A_{ij(m)}^{\alpha\beta} - A_{ij(*)}^{\alpha\beta}\Big] D_\beta v^j w_m^i (D_\alpha \zeta)\zeta \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}s +
\end{aligned}
\tag{9.48}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{\varepsilon_m}\int_{-1}^{s'}\int_{B_1}(A_i^\alpha(x_m+R_m y,t_m+R_m^2 s,u(x_m+R_m y,t_m+R_m^2 s),\lambda_m)-\\
&\qquad -A_i^\alpha(x_m,t_m-R_m^2,u_{Q_{R_m}},\lambda_m))(D_\alpha v_m^i-D_\alpha v^i)\zeta^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s+\\
&+\frac{1}{\varepsilon_m}\int_{-1}^{s'}\int_{B_1}(A_i^\alpha(x_m+R_m y,t_m+R_m^2 s,u(x_m+R_m y,t_m+R_m^2 s),\lambda_m)-\\
&\qquad -A_i^\alpha(x_m,t_m-R_m^2,u_{Q_{R_m}},\lambda_m))(v_m^i-v^i)(D_\alpha\zeta)\zeta\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s+\\
&+\frac{R_m}{\varepsilon_m}\int_{-1}^{s'}\int_{B_1}B_i(x_m+R_m y,t_m+R_m^2 s,u(x_m+R_m y,t_m+R_m^2 s),\\
&\qquad\qquad \varepsilon_m\nabla v_m+\lambda_m)(v_m^i-v^i)\zeta^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s+\\
&+\int_{-1}^{s'}\int_{B_1}|v_m-v|^2\zeta^2\rho'\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s\;=\\
&=\;I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6+I_7.
\end{aligned}
$$

Benutzt man die Tatsache, daß $v\in C^1(\overline{Q_{1/2}},\mathbb{R}^N)$, so erhält man mit einer analogen Argumentation wie im Beweis von Lemma 3.6 unter Benutzung der Hölderschen und Youngschen Ungleichung

$$
I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6+I_7\;\le
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(9.49)}\quad &\le\; c\left\{\int_{Q_{1/2}}|v_m-v|^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s+\left(\int_{B_1}|\mathbf{A}_m-\mathbf{A}_*|^{q'}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s\right)^{1/q'}+\gamma(R_m)^{-2}+R_m^{\frac{q-1}{4}}\right\}+\\
&\quad+\frac{\nu_0}{2}\int_{-1}^{s'}\int_{B_1}(1+|\varepsilon_m\nabla v_m+\lambda_m|)^{q-2}|\nabla v_m-\nabla v|^2\zeta^2\rho\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s,\ ^{4)}
\end{aligned}
$$

($c=\text{const}>0$ unabhängig von $m\in\mathbb{N}$).

Nach Einsetzen der obigen Abschätzung in (9.48) erhält man

$$
\begin{aligned}
\text{(9.50)}\qquad &\int_{Q_\tau}(1+|\varepsilon_m\nabla v_m+\lambda_m|)^{q-2}|\nabla v_m-\nabla v|^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s\;\le\\
&\le\; C_7\left\{\int_{Q_{1/2}}|v_m-v|^2\,\mathrm{d}y+\left(\int_{B_1}|\mathbf{A}_*-\mathbf{A}_m|^{q'}\,\mathrm{d}y\right)^{1/q'}+\gamma(R_m)^{-2}+R_m^{\frac{q-1}{4}}\right\}
\end{aligned}
$$

mit einer von $m\in\mathbb{N}$ unabhängigen positiven Konstante C_7. Aus (9.43) und (9.33) folgt schließlich, daß die rechte Seite von (9.50) für $m\to+\infty$ gegen 0 konvergiert. Zusammen

[4)] Hierbei bezeichne $\mathbf{A}_m$ (bzw. $\mathbf{A}_*$) die Koeffizientenmatrix $\{A^{\alpha\beta}_{ij(m)}\}$ (bzw. $\{A^{\alpha\beta}_{ij(*)}\}$).

mit der Hölderschen Ungleichung bestätigt man die behauptete Konvergenzeigenschaft (9.46). ■

Für die Abschätzung des Maßes der Singulärmenge benötigen wir noch die folgende vorbereitende Ungleichung

Lemma 9.4 *Sei $u \in V_q^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung von (9.1). Seien die Bedingungen (9.2)−(9.4) und (9.6) erfüllt. Dann existiert eine Konstante $c > 0$, so daß für beliebige $X_0 \in Q$ und $0 < R < \min\{\mathrm{dist}(X_0, \partial Q), 1\}$ gilt:*

$$(9.51)\qquad \left(\frac{1}{R^q}\fint_{Q_R} |u - u_{Q_R} - (\nabla u)_{Q_R} \cdot (x - x_0)|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq c\left(\fint_{Q_R} |\nabla u - (\nabla u)_{Q_R}|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/q} + c\,(\omega(3\sqrt{R}) + \sqrt{R})\mathcal{M}(u; X_0, R)^q.$$

Beweis. - Seien $X_0 \in Q$ und $0 < R < \min\{\mathrm{dist}(X_0, \partial Q), 1\}$ beliebig gewählt. Wir setzen

$$w(x,t) := u(x,t) - (\nabla u)_{Q_R} \cdot (x - x_0) \quad (\{x,t\} \in Q).$$

Aus (9.8) schließt man mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, daß für beliebige $\varphi \in C_c^1(Q;\mathbb{R}^N)$ die folgende Integralidentität erfüllt ist

$$\begin{aligned} -\int_Q w^i \frac{\partial \varphi^i}{\partial t} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_Q A_{ij(0)}^{\alpha\beta} D_\beta w^j D_\alpha \varphi^i \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &= \\ = \int_Q (A_i^\alpha(x_0, t_0 - R^2, u_{Q_R}, (\nabla u)_{Q_R}) - A_i^\alpha(x, t, u, (\nabla u)_{Q_R})) D_\alpha \varphi^i \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &+ \\ + \int_Q B_i(x, t, u, \nabla u) \varphi^i \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t&, \end{aligned}$$

wobei

$$A_{ij(0)}^{\alpha\beta}(x,t) := \int_0^1 \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial \xi_\beta^j}(x, t, u(x,t), (\nabla u)_{Q_R} + s\nabla w(x,t)) \,\mathrm{d}s \quad (\{x,t\} \in Q).$$

Die verallgemeinerte Poincaré-Ungleichung (b.22) impliziert nun mit Hilfe von (9.2), (9.4) und (9.6) die folgende Ungleichung

$$R^{-q}\fint_{Q_R}|w-w_{Q_R}|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le c\fint_{Q_R}|\nabla w|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+$$
$$+\,c\fint_{Q_R}\omega(|x-x_0|+|t-t_0+R^2|^{1/2}+|u-u_{Q_R}|)^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t(1+|(\nabla u)_{Q_R}|^{q-1})^q+$$
$$+\,c\,R^q\Big(\fint_{Q_R}(1+|u|^{q(n+2)/n-1}+|\nabla u|^{q-n/(n+2)})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^q.$$

Nach Anwendung von (9.19), der Hölderschen und der Youngschen Ungleichung bekommt man schließlich

$$\Big(R^{-q}\fint_{Q_R}|w-w_{Q_R}|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{1/q} \le c\Big(\fint_{Q_R}|\nabla w|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{1/q}+$$
$$+\,c\,(\omega(3\sqrt{R})+\sqrt{R})\mathcal{M}(u;X_0,R)^q+$$
$$+\,c\,R\fint_{Q_R}(1+|u|^{q(n+2)/n}+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus der letzten Abschätzung unter Benutzung von (9.9). ∎

Beweis von Satz 9.1 - Wir setzen $d_X := \operatorname{dist}(X,\partial Q)\,(X\in Q)$ und definieren die **Singulärmenge** vermöge

$$\Sigma := \Big\{X_0\in Q\,\Big|\,\liminf_{R\to 0^+}\Phi(u;X_0,R)>0\Big\}\cup\Big\{X_0\in Q\,\Big|\,\sup_{0<R<d_{X_0}}\mathcal{M}(u;X_0,R)=+\infty\Big\}.$$

1° *Es gilt* $\operatorname{mes}_{n+1}(\Sigma)=0$: Setzt man

$$f(x,t) := 1+|u(x,t)|^{q(n+2)/n}+|\nabla u(x,t)|^q \quad (\{x,t\}\in Q),$$

so schließt man aus den Eigenschaften der entsprechenden Maximalfunktion

$$\sup_{0<R<d_X} f_{Q_R(X)} < +\infty \quad \text{ffa. } X\in Q, \text{ [5]}$$

und mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung folgt:

$$\sup_{0<R<d_X}\mathcal{M}(u;X,R) \le \sup_{0<R<d_X} f_{Q_R(X)} < +\infty \quad \text{ffa. } X\in Q. \tag{9.52}$$

Auf der anderen Seite haben wir

[5] Siehe in [Ivert and Naumann (1988)].

$$\liminf_{R\to 0^+} \fint_{Q_R(X)} |\nabla u - (\nabla u)_{Q_R(X)}|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;=\; 0 \quad \text{ffa. } X \in Q. \tag{9.53}$$

In der Tat, seien $Q' \subset\subset Q'' \subset\subset Q$ und setzt man

$$\begin{cases} \Psi_R(X) := \operatorname{mes}(B_1) \fint_{Q_R(X)} |\nabla u - (\nabla u)_{Q_R(X)}|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ (X \in Q', 0 < R < R_0 := \min\{\operatorname{dist}(Q, \partial Q''), \operatorname{dist}(Q', \partial Q'')\}), \end{cases}$$

so ergibt sich unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung, der Transformationsformel für das Lebesgue-Integral und dem Satz von Fubini sowie der Stetigkeit im Mittel

$$\int_{Q'} \Psi_R \,\mathrm{d}X \le \int_{Q_1}\int_{Q_1}\int_{Q''} |\nabla u(x,t) - \nabla u(x + R(y-\bar y), t + R^2(s-\bar s))|^q \,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y\,\mathrm{d}\bar Y$$
$$\to 0 \quad \text{für} \quad R \to 0.$$

Nach dem Satz von Riesz-Fischer gibt es eine Folge positiver Zahlen $(R_j) \subset (0, R_0)$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} R_j = 0$ und

$$\Psi_{R_j}(X) \to 0 \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

Dies impliziert

$$\liminf_{R\to 0^+} \Psi_R(X) \;=\; 0 \quad \text{ffa. } X \in Q',$$

was die obige Behauptung mittels Ausschöpfen der Menge Q durch abzählbar viele $Q' \subset\subset Q$ beweist.

Wendet man (9.51) an, und kombiniert man (9.52) und (9.53), so folgt

$$\liminf_{R\to 0^+} \Phi(u; X, R) \;=\; 0 \quad \text{ffa. } X \in Q. \tag{9.54}$$

Aus (9.52) und (9.54) folgt schließlich $\operatorname{mes}_{n+1}(\Sigma) = 0$.

2° Nun sei $X_0 \in Q \setminus \Sigma$ beliebig gewählt. Dann setzen wir

$$M \;:=\; 3 \sup_{0<R<d_{X_0}} \mathcal{M}(u; X_0, R).$$

Als nächstes wählen wir $\tau \in (0, \frac{1}{2})$, so daß

$$2A\sqrt{\tau} \;\le\; 1. \tag{9.55}$$

Außerdem existiert ein $0 < R_0 < \min\{\operatorname{dist}(X_0, \partial Q), 1\}$, so daß

$$(9.56)\qquad \begin{cases} \dfrac{\lambda_0}{1-\sqrt{\tau}}\left(\Phi(u; X_0, R_0) + \dfrac{1}{1-\tau}\displaystyle\int_0^{R_0} \frac{\omega_0(t)}{t}\,dy + \omega_0(R_0)\right) < \dfrac{M}{2}; \\ \Phi(u; X_0, R_0) + \dfrac{\omega_0(R_0)}{1-\sqrt{\tau}} < \varepsilon_0. \end{cases}$$

Aufgrund der Absolutstetigkeit des Lebesgue-Integrals existiert eine Zahl $0 < r < \operatorname{dist}(X_0, \partial Q) - R_0$, so daß die folgende Bedingung für jedes $Y \in Q_r(X_0)$ gültig ist:

$$(9.57)\qquad \begin{cases} \mathcal{M}(u; Y, R_0) \le \dfrac{M}{2}; \\ \dfrac{\lambda_0}{1-\sqrt{\tau}}\left(\Phi(u; Y, R_0) + \dfrac{1}{1-\tau}\displaystyle\int_0^{R_0} \frac{\omega_0(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \omega_0(R_0)\right) \le \dfrac{M}{2}; \\ \Phi(u; Y, R_0) + \dfrac{\omega_0(R_0)}{1-\sqrt{\tau}} \le \varepsilon_0. \end{cases}$$

Sei $Y \in Q_r(X_0)$ beliebig fixiert. Wir setzen

$$\begin{aligned} \phi_m &:= \Phi(u; Y, \tau^m R_0), \\ \mathcal{M}_m &:= \mathcal{M}(u; Y, \tau^m R_0), \\ s_m &:= \omega_0(\tau^m R_0). \end{aligned}$$

($m \in \mathbb{N}$). Wie man sich leicht klarmacht, erfüllen die Folgen $(\phi_m), (\mathcal{M}_m)$ und (s_m) die Voraussetzungen (E1)-(E5) von Lemma A.8.

In der Tat, (E1) verifiziert man unter Verwendung von Lemma 9.3. Die Bedingung (E2) erhält man aus (9.10) (vgl. Lemma 9.1) und die Bedingungen (E3), (E4), (E5) schließt man mit Hilfe von (a.25) aus (9.57). Nun sind wir in der Lage, das technische Lemma A.8 anzuwenden und erhalten

$$(9.58)\qquad \phi_m(Y) \le \tau^{m/2}\phi_0 + \sum_{k=0}^{m-1} \tau^{(m-k)/2} s_k \quad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Schließlich folgt mit einem Standardschluß (siehe zum Beispiel in [Giaquinta (1983)])

$$(9.59)\qquad \begin{cases} \displaystyle{⨍}_{Q_\sigma(Y)} |\nabla u - (\nabla u)_{Q_\sigma(Y)}|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le C_0\,\omega_1(\sigma) \\ \forall\, Y \in Q_r(X_0),\ \forall\, \sigma \in (0, R_0] \end{cases}$$

($C_0 = \text{const} > 0$ unabhängig von σ), wobei

$$\omega_1(\sigma) := \begin{cases} \tau^{m/2} + \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \tau^{(m-k)/2} s_k & \forall\, \sigma \in (\tau^m R_2, \tau^{m-1} R_2] \quad (m \in \mathbb{N}) \\ \varepsilon_0 + s_0 \quad \forall\, \sigma > R_2. \end{cases}$$

Aus (9.59) folgt mit einer analogen Argumentation wie in Anmerkung B.2

$$\nabla u\big|_{Q_r(X_0)} \in \mathfrak{L}^q_{(\omega_1)}(Q_r(X_0); \mathbb{R}^{nN}).$$

Wegen

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \tau^{(m-k)/2} s_k \le \frac{1}{1-\sqrt{\tau}} \sum_{k=0}^{\infty} s_k < +\infty,$$

findet man nach Anwendung von (a.25)

$$\int_0^1 \frac{\omega_1(\sigma)}{\sigma} \,\mathrm{d}\sigma < +\infty.$$

Dies impliziert nach Satz B.5

$$\nabla u\big|_{Q_r(X_0)} \in C(\overline{Q_r(X_0)}; \mathbb{R}^{nN}).$$

Insbesondere ist $Q_0 = Q \setminus \Sigma$ eine offene Menge mit $\operatorname{mes}(Q \setminus Q_0) = 0$ und es gilt

$$u\big|_{Q_0} \in C^1(Q_0; \mathbb{R}^N),$$

was die erste Aussage (i) des Satzes beweist.

Die Aussage (ii) des Satzes beweist man, bis auf einige wenige Modifikationen, in ähnlicher Weise wie (i). ∎

9.3 Partielle Regularität bei zwei Raumdimensionen

Ähnlich wie bei elliptischen Systemen ist zu erwarten, daß bei „kleinen Raumdimensionen" analoge Resultate wie in [Campanato (1978)] zu erhalten sind, ohne vorauszusetzen, daß die Koeffizienten A_i^α der Dini-Bedingung (9.14) genügen. Außerdem sind wir daran interessiert, das Hausdorff-Maß der Singulärmenge genauer abzuschätzen.

Im vorliegenden Abschnitt zeigen wir bei zwei Raumdimensionen die partielle Regularität einer schwachen Lösung $u \in V_q^{1,0}(Q; \mathbb{R}^N)$ des nichtlinearen parabolischen Systems (9.1) mit *kontrolliertem Wachstum*. Das Hauptresultat dieses Abschnittes ist der folgende

Satz 9.3 *Sei $u \in V_q^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung von (9.1) $(n = 2)$, wobei die Koeffizienten A_i^α $(\alpha = 1,2; i = 1,\dots,N)$ den Bedingungen (9.2)–(9.5) genügen und B_i $(i = 1,\dots,N)$ der Bedingung (9.6) genügt. Dann gibt es eine offene Menge $Q_0 \subset Q$ mit $\mathrm{mes}_3(Q \setminus Q_0) = 0$, so daß*

$$u\big|_{Q_0} \in C^{\gamma,\gamma/2}(Q_0;\mathbb{R}^N) \quad \text{für ein } 0 < \gamma < 1. \tag{9.60}$$

Außerdem haben wir für jedes beliebige $0 < \varepsilon < 1$

$$\mathcal{H}^{2+\varepsilon}(Q \setminus Q_0) \;=\; 0. \tag{9.61}$$

Dem Beweis von Satz 9.3 stellen wir einige vorbereitende Lemmas voran.

Lemma 9.5 *Sei $u \in V_q^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung von (9.1) und seien die Bedingungen (9.2)–(9.4) sowie (9.6) erfüllt. Existiert außerdem eine Zahl $\delta \in (0, 2-q]$, so daß*

$$\int_{Q_\sigma^*} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le\; c\,\sigma^{2+\frac{2\delta}{2-q}} \quad \forall\, Q_\sigma^* \subset Q, \tag{9.62}$$

wobei

$$Q_\sigma^* \;:=\; B_\sigma \times (t_0 - \sigma^{q+\delta}, t_0),$$

dann gilt für beliebiges $\mu \in (0, \delta/2)$:

$$u\big|_{Q'} \in C^{\mu,\mu/(q+\delta)}(\overline{Q'};\mathbb{R}^N) \quad \forall\, Q' \subset\subset Q.$$

Beweis. - Wir zerlegen den Beweis des Lemmas in vier Schritte:
1° *Gebrochene Differenzierbarkeit bezüglich der Variablen t*: Sei $X_0 = \{x_0, t_0\} \in Q$ und seien $0 < \sigma < R < \frac{1}{2}\min\{\mathrm{dist}(x_0,\partial\Omega), (T-t_0)^{1/(q+\delta)}, 1\}$. Wie im Beweis von Lemma 6.1 bekommt unter Verwendung von (9.2), (9.4) und (9.6) für alle $0 < h < \sigma^{q+\delta}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\int_{t_0-\sigma^{q+\delta}}^{t_0-h}\int_{B_\sigma} |\Delta_h u|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le&\\ \le\; c\,(R-\sigma)^{-q}\int_{Q_R^*} |u - u_{Q_R^*}|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;+\; c\int_{Q_R^*} &(1 + |\nabla u|^q + |u|^{2q}) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{9.63}$$

Benutzt man die Ungleichung

$$(9.64)\qquad \int_{Q_R^*} |u|^{2q}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \Big(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-R^{q+\delta},t_0)} \int_{B_R} |u(\cdot,t)|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{q/2} \times \\ \times \Big(\int_{Q_R^*} |\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \,+\, R^{-q} \int_{Q_R^*} |u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \Big),$$

deren Gültigkeit wegen Anmerkung 6.1 gewährleistet ist, und setzt man in (9.63) insbesondere $R = 2\sigma$, so folgt

$$(9.65)\qquad \frac{1}{h}\int_{t_0-\sigma^{q+\delta}}^{t_0-h} \int_{B_\sigma} |\Delta_h u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le c\Big(\int_{Q_{2\sigma}^*} (1+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \sigma^{-q} \int_{Q_{2\sigma}^*} |u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big),$$

wobei $c = \text{const} > 0$ nur von N, c_0, c_1, q und u abhängt.

Als nächstes sei $\dfrac{2-q}{2q} < \mu < \dfrac{1}{2}$ beliebig gewählt. Dann schließt man aus (9.65)

$$(9.66)\qquad \int_{t_0-\sigma^{q+\delta}}^{t_0} \int_{t_0-\sigma^{q+\delta}}^{t_0} \frac{\|u(\cdot,s)-u(\cdot,t)\|^2_{L^2(B_\sigma)}}{|s-t|^{1+2\mu}}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \le \\ \le c\,\sigma^{q+\delta-2(q+\delta)\mu}\Big(\int_{Q_{2\sigma}^*} (1+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \,+\, \sigma^{-q}\int_{Q_{2\sigma}^*} |u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big).$$

2° *Poincaré-Ungleichung*: Sei $\dfrac{2-q}{2q} < \theta < \mu$ beliebig fixiert. Nach Anwendung von (b.20) (vgl. Folgerung B.1) erhält man

$$(9.67)\qquad \int_{Q_\sigma^*} |u-u_{Q_\sigma^*}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \\ \le c\,\sigma^{2(q+\delta)\theta}\operatorname{mes}(Q_\sigma^*)^{1-2/q}\Big(\int_{t_0-\sigma^{q+\delta}}^{t_0}\int_{t_0-\sigma^{q+\delta}}^{t_0} \frac{\|u(\cdot,s)-u(\cdot,t)\|^q_{L^q(Q_\sigma)}}{|s-t|^{1+q\theta}}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\Big)^{2/q} + \\ + c\,\sigma^2\operatorname{mes}(Q_\sigma^*)^{1-2/q}\Big(\int_{Q_\sigma^*} |\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{2/q}.$$

Unter Benutzung der Hölderschen Ungleichung verifiziert man

$$\sigma^{2(q+\delta)\theta}\operatorname{mes}(Q_\sigma^*)^{1-2/q}\Big(\int_{t_0-\sigma^{q+\delta}}^{t_0}\int_{t_0-\sigma^{q+\delta}}^{t_0} \frac{\|u(\cdot,s)-u(\cdot,t)\|^q_{L^q(B_\sigma)}}{|s-t|^{1+q\theta}}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\Big)^{2/q} \le \\ \le c\,\sigma^{2(q+\delta)\mu} \int_{t_0-\sigma^{q+\delta}}^{t_0}\int_{t_0-\sigma^{q+\delta}}^{t_0} \frac{\|u(\cdot,s)-u(\cdot,t)\|^2_{L^2(B_\sigma)}}{|s-t|^{1+2\mu}}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t.$$

Kombiniert man diese Ungleichung mit (9.67), so folgt

$$\int_{Q_\sigma^*} |u - u_{Q_\sigma^*}|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \leq c\,\sigma^{2(q+\delta)\mu} \int_{t_0-\sigma^{q+\delta}}^{t_0} \int_{t_0-\sigma^{q+\delta}}^{t_0} \frac{\|u(\cdot,s)-u(\cdot,t)\|^2_{L^2(B_\sigma)}}{|s-t|^{1+2\mu}} \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t + \\ + \; c\,\sigma^2 \operatorname{mes}(Q_\sigma^*)^{1-2/q} \Big(\int_{Q_\sigma^*} |\nabla u|^q \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \Big)^{2/q}. \tag{9.68}$$

Schätzt man den ersten Summanden von (9.68) mit Hilfe von (9.66) nach oben ab, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{Q_\sigma^*} |u - u_{Q_\sigma^*}|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \; &\leq \; c\,\sigma^{q+\delta} \int_{Q_{2\sigma}^*} (1 + |\nabla u|^q) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \\ &+ \; c\,\sigma^2 \operatorname{mes}(Q_\sigma^*)^{1-2/q} \Big(\int_{Q_\sigma^*} |\nabla u|^q \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \Big)^{2/q} + \\ &+ \; c\,\sigma^\delta \int_{Q_{2\sigma}^*} |u|^q \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{9.69}$$

wobei $c = \mathrm{const} > 0$ nur von $N, q, c_0, c_1, \theta, \mu$ und u abhängt.

Die Bedingung $0 < \delta < 2-q$ impliziert $q+\delta > \frac{2\delta}{2-q}$. Somit findet man unter Verwendung der Youngschen Ungleichung

$$\begin{aligned} &\sigma^{q+\delta} \int_{Q_{2\sigma}^*} (1 + |\nabla u|^q) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \; = \\ &= \sigma^{q+\delta} \operatorname{mes}(Q_{2\sigma}^*) + \operatorname{mes}(Q_\sigma^*)^{1-q/2} \sigma^\delta \Big(\sigma^q \operatorname{mes}(Q_\sigma^*)^{q/2-1} \int_{Q_{2\sigma}^*} |\nabla u|^q \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \Big) \leq \\ &\leq \; \sigma^{\frac{2\delta}{2-q}} \operatorname{mes}(Q_\sigma^*) \; + \; \sigma^2 \operatorname{mes}(Q_\sigma^*)^{1-2/q} \Big(\int_{Q_{2\sigma}^*} |\nabla u|^q \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \Big)^{2/q}. \end{aligned} \tag{9.70}$$

Aus (9.69) erhält man mit Hilfe der Ungleichung (9.70)

$$\begin{aligned} \int_{Q_\sigma^*} |u - u_{Q_\sigma^*}|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \; &\leq \; \sigma^2 \operatorname{mes}(Q_\sigma^*)^{1-2/q} \Big(\int_{Q_{2\sigma}^*} |\nabla u|^q \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \Big)^{2/q} + \\ &+ \; c\,\sigma^\delta \int_{Q_{2\sigma}^*} |u|^q \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \; + \; c\,\sigma^{\frac{2\delta}{2-q}} \operatorname{mes}(Q_\sigma^*), \end{aligned} \tag{9.71}$$

und nach Anwendung der Hölderschen sowie der Youngschen Ungleichung bekommt man

$$\begin{aligned} \int_{Q_\sigma^*} |u - u_{Q_\sigma^*}|^q \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \; &\leq \; c\,\sigma^q \int_{Q_{2\sigma}^*} |\nabla u|^q \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \\ &+ \; c\,\sigma^{q\delta/2} \Big(\operatorname{mes}(Q_{2\sigma}^*) \; + \; \int_{Q_{2\sigma}^*} |u|^q \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \Big), \end{aligned} \tag{9.72}$$

wobei $c = \text{const} > 0$ nicht von der Wahl des Zylinders $Q^*_{2\sigma}$ abhängt.

3° *Morrey-Raum-Abschätzungen*: Sei $Q' \subset\subset Q$ ein beliebiger offener Zylinder. Wir definieren

$$\lambda_0 := \sup\left\{0 \le \lambda \le q+2+\delta \,\middle|\, u \in L^{q,\lambda}_{q+\delta}(Q';\mathbb{R}^N)\right\}.\text{[6)]}$$

Unter Verwendung einer indirekten Methode zeigen wir, daß $\lambda_0 = q+2+\delta$. Wir nehmen also an, daß $\lambda_0 < q+2+\delta$. Sei $\lambda_1 \in (\lambda_0 - q\delta/2, \lambda_0)$ beliebig gewählt. Dann folgt aus (9.72) unter Beachtung der Voraussetzung (9.62), daß für alle $X_0 = \{x_0, t_0\} \in Q'$ und $0 < \sigma < \frac{1}{2}\min\{\text{dist}(X_0, \partial\Omega'), t_0^{1/(q+\delta)}, 1\}$:

$$\int_{Q^*_\sigma(X_0)} |u - u_{Q^*_\sigma(X_0)}|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le\; C_0\,\sigma^{\min\{q+2+\delta, q\delta/2+\lambda_1\}}.$$

Dies liefert nach Satz B.6 und Anmerkung B.2

$$u \in L^{q,\lambda}_{q+\delta}(Q';\mathbb{R}^N) \quad \forall\, 0 \le \lambda < \lambda_2,$$

wobei

$$\lambda_2 := \min\{q+2+\delta, q\delta/2 + \lambda_1\} > \lambda_0,$$

was jedoch im Widerspruch zur Annahme steht.

Benutzt man diese Information, und wendet man nochmals (9.72) an, so folgt für ein beliebig gewähltes $0 < \mu < \delta/2$

$$u \in \mathfrak{L}^{q,\,q+\delta+2+q\mu}_{q+\delta}(Q';\mathbb{R}^N).$$

Die Behauptung des Satzes ergibt sich nunmehr aus Satz B.6. und Anmerkung B.2. ■

Als nächstes leiten wir eine nützliche Caccioppoli-Ungleichung her. Diese ist gewissermaßen ein Ersatz für höhere Integrierbarkeit:

Lemma 9.6 *Seien die Bedingungen (9.2)-(9.6) erfüllt. Sei $u \in V^{1,0}_q(Q;\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung von (9.1). Dann gibt es eine Zahl $0 < \gamma < \min\{2(q-1), 2-q\}$, so daß*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_1,T)} \int_{\Omega'} |u(\cdot,t)|^{2+\gamma}\,\mathrm{d}x \;+\; \int_{t_1}^T \int_{Q'} (|u|^\gamma |\nabla u|^q + |u|^{2q+\gamma})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t < +\infty \tag{9.73}$$

für beliebige $\Omega' \subset\subset \Omega$ und $t_1 \in (0,T)$.

[6)] Zur Definition der Räume $L^{q,\lambda}_{q+\delta}(Q)$ (bzw. $\mathfrak{L}^{q,\lambda}_{q+\delta}(Q)$) siehe Definition B.2.

Unter der zusätzlichen Voraussetzung

$$\delta \le \frac{\gamma(2-q)}{4} \tag{9.74}$$

existiert zu jedem Teilzylinder $Q' := (t_1, T) \times \Omega'$ $(\Omega' \subset\subset \Omega, t_1 \in (0,T))$ *eine Zahl*

$$0 < R_0 < \min\Big\{\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega), t_1^{1/(q+\delta)}, 1\Big\},$$

so daß die folgende Abschätzung für beliebige $X_0 \in Q'$ *und* $0 < R \le R_0$ *gilt:*

$$\begin{aligned} R^{-2-\frac{2\delta}{2-q}} \int_{Q^*_{R/4}} |u - u_{Q^*_{R/2}}|^\gamma (1 + |\nabla u|^q)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \ \le \\ \le\ c\, R^{\frac{\delta\gamma}{2-q}} \Big(1 + \Phi(u; X_0, R)^{q'q}\Big), \end{aligned} \tag{9.75}$$

wobei

$$\Phi(u; X_0, R) \,:=\, \bigg(R^{-2-\frac{2\delta}{2-q}} \int_{Q^*_R} (1 + |\nabla u|^q)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \,+\, R^{-q-2} \int_{Q^*_R} (1 + |u|^q)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t\bigg)^{1/q}$$

und $c = \text{const} > 0$ *nur von* $c_0/\nu_0, c_1, q, N, 1/\operatorname{dist}(Q', \partial Q)$ *und* u *abhängt.*

Beweis. - Wir beginnen den Beweis mit einigen Vorbemerkungen
1) Sei $t_1 \in (0, T]$ und sei $\Omega' \subset\subset \Omega$ offen mit $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$. Nach Anmerkung 6.1 haben wir die stetige Einbettung

$$V_q^{1,0}(Q'; \mathbb{R}^N) \subset L^{2q}(Q'; \mathbb{R}^N).$$

Darüber hinaus impliziert die Ungleichung (6.2), daß

$$\int_{Q'} |u|^{2q}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \ \le\ c \operatorname*{ess\,sup}_{t \in (0,T)} \bigg(\int_{\Omega'} |u(\cdot, t)|^2\, \mathrm{d}x\bigg)^{q/2} \int_{Q'} (|u|^q \,+\, |\nabla u|^q)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t. \tag{9.76}$$

2) Seien γ, ε positive Zahlen. Seien $0 < t_1 < t_2 < T$. Sei $\zeta \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\Omega)$ und sei $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\rho(t) = 0$ für alle $t \in (-\infty, t_1)$. Dann gilt für jede Funktion $v \in L^2(Q; \mathbb{R}^N)$ mit $\dfrac{\partial v}{\partial t} \in L^2(Q; \mathbb{R}^N)$

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{|v(\cdot,t)|^{2+\gamma}}{(\varepsilon|v(\cdot,t)|^2+1)^{\gamma/2}}\zeta^2\rho(t)\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_{t_1}^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\int_\Omega \Big(\frac{|v(\cdot,s)|^2}{\varepsilon|v(\cdot,s)|^2+1}\Big)^{\gamma/2}|v(\cdot,s)|^2\zeta^2\rho(s)\,\mathrm{d}x\Big]\,\mathrm{d}s = \\
&= \int_{t_1}^t\int_\Omega \frac{\partial v^i}{\partial t}\frac{v^i|v|^\gamma}{(\varepsilon|v|^2+1)^{\gamma/2}}\Big(2+\frac{\gamma}{\varepsilon|v|^2+1}\Big)\zeta^2\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + \\
&\qquad + \int_{t_1}^t\int_\Omega \frac{|v|^{2+\gamma}}{(\varepsilon|v|^2+1)^{\gamma/2}}\zeta^2\rho'\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
\tag{9.77}
$$

für alle $t \in (t_1, t_2)$.

3) Sei $u \in V_q^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung von (9.1). Sei $0 < t_1 < T$ und sei $\Omega' \subset\subset \Omega$ mit $\Omega' \in \mathcal{C}^{0,1}$. Ähnlich wie in [Naumann and Wolff, M. (1994)] erhält unter Verwendung des Steklov-Mittels die folgende Lokalisierung von (9.8):

$$
\begin{cases}
\displaystyle\int_{\Omega'} \frac{\partial u^i_\lambda}{\partial t}(x,t)\psi^i(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega'}(A_i^\alpha(x,t,u,\nabla u))_\lambda(x,t)D_\alpha\psi^i(x)\,\mathrm{d}x = \\
\qquad \displaystyle = \int_{\Omega'}(B_i(x,t,u,\nabla u))_\lambda(x,t)\psi^i(x)\,\mathrm{d}x \\
\text{ffa. } t\in(0,t_1), \text{ für alle } \lambda\in(0,T-t_1) \\
\text{und alle } \psi\in W_q^1(\Omega';\mathbb{R}^N) \quad \text{mit } \psi = 0 \quad \text{f.ü. auf } \partial\Omega'.
\end{cases}
\tag{9.78}
$$

1° *Höhere Integrierbarkeit*: Seien $\Omega' \subset\subset \Omega$ mit $\Omega' \in \mathcal{C}^{0,1}$ und $0 < t_1 < T$ beliebig fixiert. Wir setzen $Q' := \Omega' \times (t_1, T)$.

Sei $X_0 \in Q'$ und seien $0 < \sigma < R < \min\{\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega), t_1^{1/(q+\delta)}\}$ beliebig gewählt. Sei $\zeta \in C_c^\infty(B_R)$ eine Schnittfunktion, so daß $\zeta(x) = 1$ für alle $x \in B_\sigma$, $0 \le \zeta(x) \le 1$ und $|\nabla\zeta(x)| \le \dfrac{c_0}{R-\sigma}$ für alle $x \in B_R$, und sei $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ eine Funktion mit $\rho(t) = 0$ für alle $t \in (-\infty, t_0 - R^{q+\delta}]$, $\rho(t) = 1$ für alle $t \in [t_0 - \sigma^{q+\delta}, +\infty)$ und $0 \le \rho(x) \le 1$, $0 \le \rho'(x) \le \dfrac{c_0}{(R-\sigma)^{q+\delta}}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ($c_0 = \text{const}$).

Sei $0 < \gamma < \min\Big\{2(q-1), \dfrac{\nu_0}{6c_0}\Big\}$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei $\Lambda \in \mathbb{R}^N$. Dann ist die Funktion

$$
\psi(x) = \frac{(u_\lambda(x,t)-\Lambda)|u_\lambda(x,t)-\Lambda|^\gamma}{(\varepsilon|u_\lambda(x,t)-\Lambda|^2+1)^{\gamma/2}}\Big(2+\frac{\gamma}{\varepsilon|u_\lambda(x,t)-\Lambda|^2+1}\Big)\zeta^2(x)\rho(t)
$$

($x \in B_R, t \in (t_0 - R^{q+\delta}, t_0)$) ($\lambda \in (0, T-t_1)$) für (9.78) zulässig. Wir integrieren beide Seiten der Identität (9.78) über das Intervall $(t_0 - R^{q+\delta}, t)$ ($t \in (t_0 - R^{q-\delta}, t_0)$), wenden (9.77) an und führen anschließend den Grenzübergang $\lambda \to 0$ aus. Dies liefert

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_R} \frac{|u(\cdot,t)-\Lambda|^{2+\gamma}}{(\varepsilon|u(\cdot,t)-\Lambda|^2+1)^{\gamma/2}}\zeta^2(x)\rho(t)\,\mathrm{d}x+\\
&\qquad+\int_{t_0-R^{q+\delta}}^{t}\int_{B_R} A_i^\alpha(x,s,u,\nabla u)D_\alpha\varphi^i\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s=\\
&=\int_{t_0-R^{q+\delta}}^{t}\int_{B_R} B_i(x,s,u,\nabla u)\varphi^i\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s+\\
&\qquad+\int_{t_0-R^{q+\delta}}^{t}\int_{B_R}\frac{|u-\Lambda|^{2+\gamma}}{(\varepsilon|u-\Lambda|^2+1)^{\gamma/2}}\zeta^2\rho'\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}
\tag{9.79}
$$

wobei

$$
\varphi^i(x,t):=\frac{(u^i(x,t)-\Lambda^i)|u(x,t)-\Lambda|^\gamma}{(\varepsilon|u(x,t)-\Lambda|^2+1)^{\gamma/2}}\left(2+\frac{\gamma}{\varepsilon|u(x,t)-\Lambda|^2+1}\right)\zeta^2(x)\rho(t)
$$

$(\{x,t\}\in Q_R^*)$ $(i=1,\dots,N)$.

Mit Hilfe der Produkt- und Kettenregel bekommt man

$$
\begin{aligned}
D_\alpha\varphi^i&=(D_\alpha u^i)\frac{|u-\Lambda|^\gamma}{(\varepsilon|u-\Lambda|^2+1)^{\gamma/2}}\left(2+\frac{\gamma}{\varepsilon|u-\Lambda|^2+1}\right)\zeta^2\rho+\\
&+\gamma(D_\alpha u^k)\frac{(u^k-\Lambda^k)(u^i-\Lambda^i)|u-\Lambda|^{\gamma-2}}{(\varepsilon|u-\Lambda|^2+1)^{(2+\gamma)/2}}\left(2+\frac{\varepsilon|u-\Lambda|^2+\gamma}{\varepsilon|u-\Lambda|^2+1}\right)\zeta^2\rho+\\
&+2\frac{(u^i-\Lambda^i)|u-\Lambda|^\gamma}{(\varepsilon|u-\Lambda|^2+1)^{\gamma/2}}\left(2+\frac{\gamma}{\varepsilon|u-\Lambda|^2+1}\right)(D_\alpha\zeta)\zeta\rho
\end{aligned}
$$

fast überall in Q_R^* $(\alpha=1,2;i=1,\dots,N)$.

Beachtet man (9.2), (9.4) und (9.5), so erhält man unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung und Anwendung der Youngschen Ungleichung

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0-R^{q+\delta}}^{t}\int_{B_R} A_i^\alpha(x,s,u,\nabla u)D_\alpha\varphi^i\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \;\geq\\
&\geq\; 2\nu_0\int_{t_0-R^{q+\delta}}^{t}\int_{B_R}(1+|\nabla u|)^{q-2}|\nabla u|^2\frac{|u-\Lambda|^\gamma}{(\varepsilon|u-\Lambda|^2+1)^{\gamma/2}}\zeta^2\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s-\\
&\quad-\;\frac{3\gamma c_0}{q-1}\int_{t_0-R^{q+\delta}}^{t}\int_{B_R}(1+|\nabla u|)^{q-1}|\nabla u|\frac{|u-\Lambda|^\gamma}{(\varepsilon|u-\Lambda|^2+1)^{\gamma/2}}\zeta^2\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s-\\
&\quad-6\int_{t_0-R^{q+\delta}}^{t}\int_{B_R}|A_i^\alpha(x,s,u,0)||\nabla u|\frac{|u-\Lambda|^\gamma}{(\varepsilon|u-\Lambda|^2+1)^{\gamma/2}}\zeta^2\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s-\\
&\quad-\;c\int_{t_0-R^{q+\delta}}^{t}\int_{B_R}(1+|\nabla u|)^{q-1}\frac{|u-\Lambda|^{1+\gamma}}{(\varepsilon|u-\Lambda|^2+1)^{\gamma/2}}|\nabla\zeta|\zeta\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\\
&\geq\;\frac{\nu_0}{2}\int_{t_0-R^{q+\delta}}^{t}\int_{B_R}\frac{|u-\Lambda|^\gamma}{(\varepsilon|u-\Lambda|^2+1)^{\gamma/2}}|\nabla u|^q\zeta^2\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s-\\
&\quad-\;\frac{c}{(R-\sigma)^q}\int_{Q_R^*}\frac{|u-\Lambda|^{q+\gamma}}{(\varepsilon|u-\Lambda|^2+1)^{\gamma/2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\;+\;c\,\mathrm{mes}(Q_R^*).
\end{aligned}
$$

Weiterhin bekommen wir unter Berücksichtigung von (9.6) mit Hilfe der Youngschen Ungleichung

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0-R^{q+\delta}}^{t}\int_{B_R} B_i(x,s,u,\nabla u)\varphi^i\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\;\leq\\
&\leq\; c_1\int_{t_0-R^{q+\delta}}^{t}\int_{B_R}(1+|u|^{2q-1}+|\nabla u|^{q-1/2})\frac{|u-\Lambda|^{1+\gamma}}{(\varepsilon|u-\Lambda|^2+1)^{\gamma/2}}\zeta^2\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\;\leq\\
&\leq\;\frac{\nu_0}{2}\int_{Q_R^*}\frac{|u-\Lambda|^\gamma}{(\varepsilon|u-\Lambda|^2+1)^{\gamma/2}}|\nabla u|^q\zeta^2\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s+\\
&\qquad+\;c\int_{Q_R^*}\frac{|u-\Lambda|^\gamma}{(\varepsilon|u-\Lambda|^2+1)^{\gamma/2}}|u-\Lambda|^{2q}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\;+\;\mathrm{mes}(Q_R^*)(1+|\Lambda|^{2q+\gamma}).
\end{aligned}
$$

Als nächstes setzen wir

$$
H_\varepsilon(t) := \Big(\frac{t}{\varepsilon t+1}\Big)^{\gamma/2}\qquad(t\geq 0).
$$

Nach Einsetzen der letzten beiden Abschätzungen in (9.79) folgt

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-\sigma^{q+\delta},t_0)} \int_{B_\sigma} H_\varepsilon(|u(\cdot,t)-\Lambda|^2)|u(\cdot,t)-\Lambda|^2\,\mathrm{d}x + \\
&\qquad\qquad + \nu_0 \int_{Q^*_\sigma} H_\varepsilon(|u-\Lambda|^2)|\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \\
&\le c\,(R-\sigma)^{-q}\int_{Q^*_R} H_\varepsilon(|u-\Lambda|^2)|u-\Lambda|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \\
&\quad + c\,(R-\sigma)^{-q-\delta}\int_{Q^*_R} H_\varepsilon(|u-\Lambda|^2)|u-\Lambda|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + c\,\mathrm{mes}(Q^*_R)(1+|\Lambda|^{2q+\gamma}) + \\
&\quad + C_1\int_{Q^*_R} H_\varepsilon(|u-\Lambda|^2)|u-\Lambda|^{2q}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{9.80}$$

($c, C_1 =$ const unabhängig von X_0 und R). Um den letzten Summanden der rechten Seite dieser Ungleichung abzuschätzen, definieren wir

$$w(x,t) := (H_\varepsilon(|u(x,t)-\Lambda|^2))^{1/2q}(u(x,t)-\Lambda) \quad (\{x,t\}\in Q^*_R).$$

Unter Benutzung der Produkt- und Kettenregel berechnet man

$$\begin{aligned}
D_\alpha w^i \;=\; & (H_\varepsilon(|u-\Lambda|^2))^{1/2q} D_\alpha u^i + \\
& + \frac{\gamma}{2q}(H_\varepsilon(|u-\Lambda|^2))^{1/2q}\frac{(u^i-\Lambda^i)(u^k-\Lambda^k)}{|u-\Lambda|^2(\varepsilon|u-\Lambda|^2+1)} D_\alpha u^k
\end{aligned}$$

fast überall in Q^*_R $(\alpha=1,2; i=1,\dots,N)$.

Unter Verwendung des Sobolevschen Einbettungssatzes findet man:

$$w \in L^\infty(t_0-R^{q+\delta},t_0;L^2(B_R;\mathbb{R}^N)) \cap L^q(t_0-R^{q+\delta},t_0;L^{q^*}(B_R;\mathbb{R}^N)).$$ [7)]

Mit Hilfe von (6.3) bestätigt man

$$\|w\|^{2q}_{L^{2q}(Q^*_R;\mathbb{R}^N)} \le c\|w\|^q_{L^\infty(t_0-R^{q+\delta};L^2(B_R;\mathbb{R}^N))}\Big(\|\nabla w\|_{L^q(Q^*_R;\mathbb{R}^{nN})} + R^{-1}\|w\|_{L^q(Q^*_R;\mathbb{R}^N)}\Big)^q,$$

und unter Verwendung der Hölderschen und der Youngschen Ungleichung zeigt man

[7)] Hier ist $q^* := \frac{2q}{2-q}$.

$$
\begin{aligned}
&\|w\|^q_{L^\infty(t_0-R^{q+\delta};L^2(B_R;\mathbb{R}^N))}\|\nabla w\|^q_{L^q(Q^*_R;\mathbb{R}^{nN})} \le \\
&\le c\,R^\delta\Big(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-R^{q+\delta},t_0)}\int_{B_R}|u(\cdot,t)-\Lambda|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{(q-1)/2}\Big(\int_{Q^*_R}|\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2}\times \\
&\qquad\times\Big(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-R^{q+\delta},t_0)}\int_{B_R}H_\varepsilon(|u(\cdot,t)-\Lambda|^2)|u-\Lambda|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\times \\
&\qquad\qquad\times\Big(\int_{Q^*_R}H_\varepsilon(|u-\Lambda|^2)|\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2} \le \\
&\le c\Big(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-R^{q+\delta},t_0)}\int_{B_R}|u(\cdot,t)-\Lambda|^2\,\mathrm{d}x+\int_{Q^*_R}|\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{q/2}\times \\
&\qquad\times\Big(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-R^{q+\delta},t_0)}\int_{B_R}H_\varepsilon(|u(\cdot,t)-\Lambda|^2)|u-\Lambda|^2\,\mathrm{d}x+ \\
&\qquad\qquad+\int_{Q^*_R}H_\varepsilon(|u-\Lambda|^2)|\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big).
\end{aligned}
$$

In ähnlicher Weise erhält man

$$
\begin{aligned}
&R^{-q}\|w\|^q_{L^\infty(t_0-R^{q+\delta};L^2(B_R;\mathbb{R}^N))}\|w\|^q_{L^q(Q^*_R;\mathbb{R}^N)} \le \\
&\le c\Big(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-R^{q+\delta},t_0)}\int_{B_R}|u(\cdot,t)-\Lambda|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{(q-1)/2}\times \\
&\qquad\times\Big(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-R^{q+\delta},t_0)}\int_{B_R}H_\varepsilon(|u(\cdot,t)-\Lambda|^2)|u-\Lambda|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\times \\
&\qquad\times\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-R^{q+\delta},t_0)}\int_{B_R}H_\varepsilon(|u(\cdot,t)-\Lambda|^2)^{1/2}|u-\Lambda|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \\
&\le c\Big(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-R^{q+\delta},t_0)}\int_{B_R}(1+|u(\cdot,t)-\Lambda|^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{q/2}\times \\
&\qquad\times\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-R^{q+\delta},t_0)}\int_{B_R}H_\varepsilon(|u(\cdot,t)-\Lambda|^2)|u-\Lambda|^2\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

wobei $c=\mathrm{const}$ weder von X_0 noch von R abhängt. Kombiniert man die soeben erhaltenen Abschätzungen, so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\int_{Q_R^*} H_\varepsilon(|u-\Lambda|^2)|u-\Lambda|^{2q}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le\; & C_2 \mathcal{O}(X_0,R;\Lambda)^{q/2}\times \\
& \times\Big(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-R^{q+\delta},t_0)} \int_{B_R} H_\varepsilon(|u(\cdot,t)-\Lambda|^2)|u(\cdot,t)-\Lambda|^2\,\mathrm{d}x + \\
& \quad + \nu_0 \int_{Q_R^*} H_\varepsilon(|u-\Lambda|)|\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big),
\end{aligned} \tag{9.81}
$$

wobei

$$
\mathcal{O}(X_0,R;\Lambda) := \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-R^{q+\delta},t_0)} \int_{B_R}(1+|u(\cdot,t)|^2)\,\mathrm{d}x + \int_{Q_R^*}|\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;+\; R^2|\Lambda|^2
$$

(C_2 = const unabhängig von X_0 und R). Wegen der Absolutstetigkeit des Lebesgue-Integrals gibt es eine Zahl $0 < R_0 < \min\{\operatorname{dist}(\Omega',\,\partial\Omega), t_1^{1/(q+\delta)}, 1\}$, so daß

$$
C_1 C_2\, \mathcal{O}(X_0,R;\Lambda) \;\le\; \frac{1}{2} \quad \forall\, 0<R\le R_0. \tag{9.82}
$$

Kombiniert man die beiden Ungleichungen (9.80) und (9.81), so erhält man für beliebige $0<\sigma<R\le R_0$

$$
\begin{aligned}
& \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-\sigma^{q+\delta},t_0)} \int_{B_\sigma} H_\varepsilon(|u(\cdot,t)-\Lambda|^2)|u-\Lambda|^2\,\mathrm{d}x + \nu_0 \int_{Q_\sigma^*} H_\varepsilon(|u-\Lambda|^2)|\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le \\
& \le\; c\,(R-\sigma)^{-q}\int_{Q_R^*} H_\varepsilon(|u-\Lambda|^2)|u-\Lambda|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \\
& \quad +\; c\,(R-\sigma)^{-q-\delta}\int_{Q_R^*} H_\varepsilon(|u-\Lambda|^2)|u-\Lambda|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + c\ \operatorname{mes}(Q_R^*)(1+|\Lambda|^{2q+\gamma}) + \\
& \quad +\; \frac{1}{2}\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-R^{q+\delta},t_0)} \int_{B_R} H_\varepsilon(|u(\cdot,t)-\Lambda|^2)|u-\Lambda|^2\,\mathrm{d}x + \\
& \quad +\; \frac{\nu_0}{2}\int_{Q_R^*} H_\varepsilon(|u-\Lambda|^2)|\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Nach Anwendung von Lemma A.3 und Ausführung des Grenzüberganges $\varepsilon\to 0$ bestätigt man

$$
\begin{aligned}
& \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-\sigma^{q+\delta},t_0)} \int_{B_\sigma} |u(\cdot,t)-\Lambda|^{2+\gamma}\,\mathrm{d}x \;+\; \nu_0\int_{Q_\sigma^*}|u-\Lambda|^\gamma|\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le \\
& \le\; c\,(R-\sigma)^{-q}\int_{Q_R^*}|u-\Lambda|^{q+\gamma}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \\
& \quad +\; c\,(R-\sigma)^{-q-\delta}\int_{Q_R^*}|u-\Lambda|^{2+\gamma}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;+\; c\ \operatorname{mes}(Q_R^*)(1+|\Lambda|^{2q+\gamma})
\end{aligned} \tag{9.83}
$$

für alle $X_0 \in Q'$ und für beliebige $0 < \sigma < R \le R_0$. Dies liefert insbesondere

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_1,T)} \int_{\Omega'} |u(\cdot,t)|^{2+\gamma}\,\mathrm{d}x \;+\; \int_{Q'} |u|^{\gamma}|\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t < +\infty.$$

Aus (9.81) (mit $\Lambda = 0$) folgt nun nach Ausführung des Grenzüberganges $\varepsilon \to 0$

$$\int_{Q'} |u|^{2q+\gamma}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t < +\infty,$$

womit die erste Behauptung des Lemmas bewiesen ist.

2° *Verbesserte Poincaré-Ungleichung*: Mit Hilfe des soeben bewiesenen Resultates höherer Integrierbarkeit gelingt es uns nun, die im Beweis von Lemma 9.5 erhaltene Poincaré-Ungleichung (9.71) zu verbessern:

Sei $X_0 = \{x_0, t_0\}$ und seien $0 < \sigma < R < \min\{\operatorname{dist}(x_0,\partial\Omega), t_0^{1/(q+\delta)}, 1\}$. Zunächst erhält man aus (9.64) nach Anwendung der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\int_{Q_R^*} |u|^{2q}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le\; R^{\frac{q\gamma}{2+\gamma}} \Big(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-R^{q+\delta},t_0)} \int_{B_R} |u(\cdot,t)|^{2+\gamma}\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{q}{2+\gamma}} \times \\ \times \Big(\int_{Q_R^*} |\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;+\; R^{-q} \int_{Q_R^*} |u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big).\end{aligned}$$

Schätzt man die rechte Seite von (9.63) mit Hilfe dieser Ungleichung ab, so findet man

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h}\int_{t_0-\sigma^{q+\delta}}^{t_0-h} \int_{B_\sigma} |\Delta_h u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le \\ &\le c\Big(\int_{Q_R^*} (1+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;+\; (R-\sigma)^{-q} \int_{Q_R^*} |u - u_{Q_R^*}|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big) + \\ &\qquad + c\,R^{-q+\frac{q\gamma}{2+\gamma}} \int_{Q_R^*} |u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

für beliebige $0 < h < \sigma^{q+\delta}$, wobei $c = \text{const}$ nicht von h abhängt. Wir dividieren beide Seiten der letzten Ungleichung durch $h^{2\mu}$ $(0 < \mu < 1/2)$ und integrieren anschließend beide Seiten bezüglich der Variablen h über das Intervall $(0, \sigma^{q+\delta})$. Dann folgt unter Benutzung der Transformationsformel des Lebesgue-Integrals

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0-\sigma^{q+\delta}}^{t_0}\int_{t_0-\sigma^{q+\delta}}^{t_0} \frac{\|u(\cdot,s)-u(\cdot,t)\|^2_{L^2(B_\sigma;\mathbb{R}^N)}}{|s-t|^{1+2\mu}}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \;\le \\
&\le\; c\,R^{q+\delta-2(q+\delta)\mu}\Big(\int_{Q_R^*}(1+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;+\;(R-\sigma)^{-q}\int_{Q_R^*}|u-u_{Q_R^*}|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)+ \\
&\qquad +\; c\,R^{\delta-2(q+\delta)\mu+\frac{q\gamma}{2+\gamma}}\int_{Q_R^*}|u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
\tag{9.84}
$$

Wie im Beweis von Lemma 9.5 erhält man unter Verwendung von (b.20), der Ungleichung (9.84) und der Hölderschen sowie der Youngschen Ungleichung

$$
\begin{aligned}
\int_{Q_\sigma^*}|u-u_{Q_\sigma^*}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le\; & c\,R^2\,\mathrm{mes}(Q_\sigma^*)^{1-2/q}\Big(\int_{Q_R^*}|\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{2/q}+ \\
&+\; c\,R^\delta\Big(\frac{R}{R-\sigma}\Big)^q\int_{Q_R^*}|u-u_{Q_R^*}|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+ \\
&+\; c\,R^{\delta+\frac{q\gamma}{2+\gamma}}\int_{Q_R^*}|u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;+\; c\,R^{\frac{2\delta}{2-q}}\,\mathrm{mes}(Q_R^*).
\end{aligned}
$$

Den zweiten Summanden dieser Ungleichung schätzt man mit Hilfe der Hölderschen und der Youngschen Ungleichung folgendermaßen ab

$$
\begin{aligned}
&c\,R^\delta\Big(\frac{R}{R-\sigma}\Big)^q\int_{Q_R^*}|u-u_{Q_R^*}|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le \\
&\qquad\le\; c\,R^{\frac{2\delta}{2-q}}\,\mathrm{mes}(Q_R^*)\Big(\frac{R}{R-\sigma}\Big)^{\frac{2q}{2-q}} \;+\; \frac{1}{2}\int_{Q_R^*}|u-u_{Q_R^*}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

und nach Einsetzen in die obige Abschätzung bekommt man

$$
\begin{aligned}
\int_{Q_\sigma^*}|u-u_{Q_\sigma^*}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le\; & c\,R^2\,\mathrm{mes}(Q_\sigma^*)^{1-2/q}\Big(\int_{Q_R^*}|\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{2/q}+ \\
&+\; c\,R^{\delta+\frac{q\gamma}{2+\gamma}}\int_{Q_R^*}|u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;+\; c\,R^{\frac{2\delta}{2-q}}\,\mathrm{mes}(Q_R^*)\Big(\frac{R}{R-\sigma}\Big)^{\frac{2q}{2-q}}+ \\
&+\; \frac{1}{2}\int_{Q_R^*}|u-u_{Q_R^*}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

wobei $c = \mathrm{const}$ nur von N, q, c_0, c_1 und u abhängt. Nach Anwendung von Lemma A.3 ergibt sich nunmehr

$$(9.85)\qquad \int_{Q^*_{R/2}} |u - u_{Q^*_{R/2}}|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le\; c\,R^2 \operatorname{mes}(Q^*_R)^{1-2/q}\Big(\int_{Q^*_R} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{2/q} + \\ + \; c\,R^{\delta + \frac{q\gamma}{2+\gamma}} \int_{Q^*_R} |u|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;+\; c\,R^{\frac{2\delta}{2-q}} \operatorname{mes}(Q^*_R).$$

3° *Verbesserung von* (9.83): Mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung findet man elementar

$$(9.86)\qquad (R-\sigma)^{-q-\delta} \int_{Q^*_R} |u - \Lambda|^{2+\gamma} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le \\ \le\; c\left(\frac{R}{R-\sigma}\right)^{q+\delta} \operatorname{mes}(Q^*_R)^{-\vartheta} R^2 \Big(\int_{Q^*_R} |u-\Lambda|^{2q+\gamma} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{\vartheta},$$

wobei

$$\vartheta \;:=\; \frac{2+\gamma}{2q+\gamma}.$$

Wir setzen $w(x,t) := |u(x,t) - \Lambda|^{\gamma/2q}(u(x,t) - \Lambda)$ $(\{x,t\} \in Q^*_R)$. Unter Benutzung der Produkt- und Kettenregel berechnet man

$$D_\alpha w^i(x,t) \;=\; |u(x,t) - \Lambda|^{\gamma/2q} D_\alpha u^i(x,t) + \\ + \; \frac{\gamma}{2q} |u(x,t) - \Lambda|^{\gamma/2q-2}(u^i(x,t) - \Lambda^i)(u^k(x,t) - \Lambda^k) D_\alpha u^k(x,t)$$

für fast alle $\{x,t\} \in Q^*_R$ $(\alpha = 1,2; i = 1,\dots,N)$. Unter Berücksichtigung von (9.73) bestätigt man

$$w \in L^\infty(t_0 - R^{q+\delta}, t_0; L^2(B_R;\mathbb{R}^N)) \cap L^q(t_0 - R^{q+\delta}, t_0; W^{1,q}(B_R;\mathbb{R}^N)).$$

Mit Hilfe von (6.3) (siehe Anmerkung 6.1) und unter Verwendung der Hölderschen und der Youngschen Ungleichung bekommt man

$$\begin{aligned}
\int_{Q_R^*} |w|^{2q}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le\; & c\left(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-R^{q+\delta},t_0)} \int_{B_R} |w(\cdot,t)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{q/2} \times \\
& \times \left(\int_{Q_R^*} |\nabla w|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \,+\, R^{-q}\int_{Q_R^*} |w|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right) = \\
= c\left(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-R^{q+\delta},t_0)} \int_{B_R} |u(\cdot,t)-\Lambda|^{(2+\gamma)/q\vartheta}\,\mathrm{d}x\right)^{q/2} & \times \\
\times \left(\int_{Q_R^*} |u-\Lambda|^{\gamma/2}|\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + R^{-q}\int_{Q_R^*} |u-\Lambda|^{q+\gamma/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right) & \le \\
\le c\,R^{q-1/\vartheta}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-R^{q+\delta},t_0)} \int_{B_R} |u(\cdot,t)-\Lambda|^{2+\gamma}\,\mathrm{d}x\right)^{1/2\vartheta} & \times \\
\times \left(\int_{Q_R^*} |u-\Lambda|^{\gamma}|\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\int_{Q_R^*} |\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} & + \\
+ c\,R^{-1/\vartheta}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-R^{q+\delta},t_0)} \int_{B_R} |u(\cdot,t)-\Lambda|^{2+\gamma}\,\mathrm{d}x\right)^{1/2\vartheta} \int_{Q_R^*} |u-\Lambda|^{q+\gamma/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t & \le \\
\le c\,R^{q-1/\vartheta}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-R^{q+\delta},t_0)} \int_{B_R} |u(\cdot,t)-\Lambda|^{2+\gamma}\,\mathrm{d}x + \int_{Q_R^*} |u-\Lambda|^{\gamma}|\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1+\vartheta}{2\vartheta}} & \times \\
\times \left(\int_{Q_R^*} |\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} & + \\
+ c\,R^{-1/\vartheta}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-R^{q+\delta},t_0)} \int_{B_R} |u(\cdot,t)-\Lambda|^{2+\gamma}\,\mathrm{d}x\right)^{1/2\vartheta} \int_{Q_R^*} |u-\Lambda|^{q+\gamma/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. &
\end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\begin{aligned}
R^2\left(\int_{Q_R^*} |u-\Lambda|^{2q+\gamma}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{\vartheta} \;\le\; & c\,R^{q\vartheta+1}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-R^{q+\delta},t_0)} \int_{B_R} |u(\cdot,t)-\Lambda|^{2+\gamma}\,\mathrm{d}x \,+\right. \\
& \left. + \int_{Q_R^*} |u-\Lambda|^{\gamma}|\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{(1+\vartheta)/2} \left(\int_{Q_R^*} |\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{\vartheta/2} + \\
& + c\,R\left(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-R^{q+\delta},t_0)} \int_{B_R} |u(\cdot,t)-\Lambda|^{2+\gamma}\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int_{Q_R^*} |u-\Lambda|^{q+\gamma/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{\vartheta}.
\end{aligned} \tag{9.87}$$

Setzt man (9.87) in die rechte Seite von (9.86) ein und wendent man anschließend die Youngsche Ungleichung an, so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
& c\,(R-\sigma)^{-q-\delta}\int_{Q^*_R}|u-\Lambda|^{2+\gamma}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le \\
& \le\; c\left(\frac{R}{R-\sigma}\right)^{\frac{2(q+\delta)}{1-\vartheta}} \operatorname{mes}(Q^*_R)^{-\frac{2\vartheta}{1-\vartheta}} R^{\frac{2q\vartheta+2}{1-\vartheta}}\left(\int_{Q^*_R}|\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{\vartheta}{1-\vartheta}} + \\
& \quad + c\left(\frac{R}{R-\sigma}\right)^{2(q+\delta)} \operatorname{mes}(Q^*_R)^{-2\vartheta} R^2\left(\int_{Q^*_R}|\nabla u|^{q+\gamma/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{2\vartheta} + \\
& \quad + \frac{1}{2}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{(t_0-R^{q+\delta},t_0)}\int_{B_R}|u-\Lambda|^{2+\gamma}\,\mathrm{d}x \;+\; \nu_0\int_{Q^*_R}|u-\Lambda|^{\gamma}|\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right).
\end{aligned}
\tag{9.88}
$$

Kombiniert man (9.88) und (9.83) und wendet man anschließend Lemma A.3 an, so folgt

$$
\begin{aligned}
& \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-(R/4)^{q+\delta},t_0)}\int_{B_{R/4}}|u(\cdot,t)-\Lambda|^{2+\gamma}\,\mathrm{d}x \;+\; \int_{Q^*_{R/4}}|u-\Lambda|^{\gamma}|\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le \\
& \le\; c\,R^{-q}\int_{Q^*_{R/2}}|u-\Lambda|^{q+\gamma}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \\
& \quad + c\,\operatorname{mes}(Q^*_R)^{-\frac{2\vartheta}{1-\vartheta}} R^{\frac{2q\vartheta+2}{1-\vartheta}}\left(\int_{Q^*_{R/2}}|\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{\vartheta}{1-\vartheta}} + \\
& \quad + c\,\operatorname{mes}(Q^*_R)^{-2\vartheta} R^2\left(\int_{Q^*_{R/2}}|u-\Lambda|^{q+\gamma/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{2\vartheta} + \\
& \quad + c\,\operatorname{mes}(Q^*_R)(1+|\Lambda|^{2q+\gamma}) \;= \\
& =\; I_1+I_2+I_3+c\,\operatorname{mes}(Q^*_R)(1+|\Lambda|^{2q+\gamma})
\end{aligned}
\tag{9.89}
$$

für alle $X_0\in Q'$ und beliebige $0<R\le R_0$, wobei $c=\text{const}$ nur von $c_0/\nu_0, c_1, q, N$ und u abhängt.

4° *Abschätzung der rechten Seite von* (9.89): In (9.89) setzen wir insbesondere $\Lambda := u_{Q^*_{R/2}}$. Unter Verwendung der Abschätzung

$$
R^2|u_{Q^*_{R/2}}|^2 \;\le\; \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-R^{q+\delta},t_0)}\int_{B_R}|u(\cdot,t)|^2\,\mathrm{d}x
$$

ist es möglich die Zahl $R_0>0$ so zu wählen, daß die Bedingung (9.82) gültig bleibt, was bedeutet, daß R_0 nicht von der Wahl des Zylinders Q^*_R, sondern nur von Q' und u abhängt.

(i) Wir beginnen nun mit der Abschätzung des Integrals I_1. Unter Benutzung der Hölderschen Ungleichung und der Poincaré-Ungleichung (9.85) bekommt man

$$
\begin{aligned}
I_1 \;&\le\; c\,\mathrm{mes}(Q_R^*)^{1-(q+\gamma)/2} R^{-q} \Big(\int_{Q^*_{R/2}} |u - u_{Q^*_{R/2}}|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \Big)^{(q+\gamma)/2} \le \\
&\le c\,\mathrm{mes}(Q_R^*)^{-\gamma/q} R^{\gamma} \Big(\int_{Q^*_R} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \Big)^{1+\gamma/q} + \\
&\quad + c\,\mathrm{mes}(Q_R^*)^{1-(q+\gamma)/2} R^{-q} \Big(R^{\delta + \frac{q\gamma}{2-q}} \int_{Q^*_R} |u|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \Big)^{(q+\gamma)/2} + \\
&\quad + c\,R^{2+\frac{\delta(2+\gamma)}{2-q}} = \\
&= I_{11} + I_{12} + c\,R^{2+\frac{\delta(2+\gamma)}{2-q}}.
\end{aligned} \tag{9.90}
$$

Zunächst erhält man elementar

$$
\begin{aligned}
I_{11} \;&\le\; c\,R^{\frac{\delta\gamma}{2-q}} \Big(R^{-2-\frac{2\delta}{2-q}} \int_{Q^*_R} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \Big)^{\gamma/q} \int_{Q^*_R} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le \\
&\le\; c\,R^{2+\frac{\delta(2+\gamma)}{2-q}} \Big(R^{-2-\frac{2\delta}{2-q}} \int_{Q^*_R} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \Big)^{1+\gamma/q}.
\end{aligned}
$$

Für die Abschätzung des Integrals I_{12} benutzen wir die Youngsche Ungleichung und schließen

$$
I_{12} \;\le\; c\,\varepsilon R^{2+\delta} \;+\; \varepsilon^{-\frac{2-q-\gamma}{q+\gamma}} R^{-q+\delta+\frac{q\gamma}{2-q}} \int_{Q^*_R} |u|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
$$

Indem man $\varepsilon := R^{\frac{\delta(q+\gamma)}{2-q}}$ setzt, folgt

$$
\begin{aligned}
I_{12} \;&\le\; c\,R^{2+\frac{\delta(2+\gamma)}{2-q}} \;+\; c\,R^{-q-\frac{\delta(2-q-\gamma)}{2-q}+\delta+\frac{q\gamma}{2+\gamma}} \int_{Q^*_R} |u|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le \\
&\le\; c\,R^{2+\frac{\delta(2+\gamma)}{2-q}} \;+\; c\,R^{2+\frac{\delta(2+\gamma)}{2-q}-q-\frac{2\delta}{2-q}+\frac{q\gamma}{2+\gamma}-2} \int_{Q^*_R} |u|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Die Voraussetzungen

$$
\delta \le \frac{\gamma(2-q)}{4} \quad \text{und} \quad \gamma \le 2(q-1)
$$

implizieren

$$\frac{2\delta}{2-q} - \frac{q\gamma}{2+\gamma} \;\le\; \frac{2\delta}{2-q} - \frac{\gamma}{2} \;\le\; 0.$$

Mit Hilfe dieser Ungleichungen verifiziert man

$$I_{12} \;\le\; c\,R^{2+\frac{\delta(2+\gamma)}{2-q}}\Big(1 \,+\, R^{-q-2}\int_{Q_R^*}|u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big).$$

Nach Einsetzen der Abschätzungen für I_{11} und I_{12} in (9.90) und Anwendung der Youngschen Ungleichung erhält man

$$\begin{aligned} I_1 \;&\le\; c\,R^{2+\frac{\delta(2+\gamma)}{2-q}}\Big(1 \,+\, \Phi(u;X_0,R)^{q+\gamma}\Big) \;\le \\ &\le\; c\,R^{2+\frac{\delta(2+\gamma)}{2-q}}\Big(1 \,+\, \Phi(u;X_0,R)^{q'q}\Big). \end{aligned}$$

(ii) Wie man leicht nachprüft gilt:

$$I_2 \;\le\; c\,R^{-\frac{2\vartheta}{1-\vartheta}(q+\delta+2)\,+\,\frac{2q\vartheta+2}{1-\vartheta}\,+\,\frac{\vartheta}{1-\vartheta}\left(2+\frac{2\delta}{2-q}\right)}\,\Phi(u;X_0,R)^{\frac{q\vartheta}{1-\vartheta}}. \tag{9.91}$$

Eine elementare Rechnung zeigt, daß

$$\frac{\vartheta}{1-\vartheta} \;=\; \frac{2+\gamma}{2(q-1)}.$$

Hiermit findet man

$$\begin{aligned} -\,\frac{2\vartheta}{1-\vartheta}(q+\delta+2) \,+\, \frac{2q\vartheta+2}{1-\vartheta} \,+\, \frac{\vartheta}{1-\vartheta}(2+\frac{2\delta}{2-q}) \;&= \\ =\; \frac{1}{1-\vartheta}\Big(2\delta\vartheta - 2\vartheta + 2 + \frac{2\delta\vartheta}{2-q}\Big) \;&= \\ =\; 2 \,+\, \frac{2\delta(q-1)\vartheta}{(2-q)(1-\vartheta)} \;=\; 2 \,+\, \frac{\delta(2+\gamma)}{2-q}&. \end{aligned}$$

Darüber hinaus haben wir wegen $\gamma \le 2(q-1)$

$$\frac{q\vartheta}{1-\vartheta} \;=\; \frac{q'(2+\gamma)}{2} \;\le\; q'q.$$

Wir erhalten nun aus (9.91) zusammen mit der Youngschen Ungleichung

$$I_2 \le c\, R^{2+\frac{\delta(2+\gamma)}{2-q}} (1 + \Phi(u; X_0, R)^{q'q}).$$

(iii) Für die Abschätzung von I_3 benutzt man zunächst die Höldersche Ungleichung. Diese liefert

$$I_3 \le c\,\mathrm{mes}(Q_R^*)^{-\frac{2+\gamma}{q+\gamma}} R^{2+q\frac{2+\gamma}{q+\gamma}} \left(R^{-q} \int_{Q_{R/2}^*} |u - u_{Q_{R/2}^*}|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right)^{\frac{2+\gamma}{q+\gamma}} \le$$
$$\le c\, R^{2-(2+\delta)\frac{2+\gamma}{q+\gamma}} (I_1)^{\frac{2+\gamma}{q+\gamma}}.$$

Setzt man in die rechte Seite der obigen Ungleichung die Abschätzung für das Integral I_1 ein, und beachtet man

$$2+\gamma \le 2q \le q' + q = q'q,$$

so bekommt man zusammen mit der Youngschen Ungleichung

$$I_3 \le c\, R^{2-(2+\delta)\frac{2+\gamma}{q+\gamma} + \left(2+\frac{\delta(2+\gamma)}{2-q}\right)\frac{2+\gamma}{q+\gamma}} \left(1 + \Phi(u; X_0, R)^{2+\gamma}\right) =$$
$$\le c\, R^{2+\frac{\delta(2+\gamma)}{2-q}} \left(1 + \Phi(u; X_0, R)^{q'q}\right).$$

(vi) Unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung bekommt man leicht

$$\mathrm{mes}(Q_R^*)|u_{Q_{R/2}^*}|^{2q+\gamma} \le c\, R^{q+\delta+2} \left(R^{-q-\delta-2} \int_{Q_R^*} |u|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right)^{2+\gamma/q} \le$$
$$\le c\, R^{2+q-\delta(1+\gamma)} \left(R^{-q-2} \int_{Q_R^*} |u|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right)^{2+\gamma/q} \le$$
$$\le c\, R^{2+q-\delta(1+\gamma)} \Phi(u; X_0, R)^{2q+\gamma}.$$

Aus $\gamma \le \min\{2(q-1), 2-q\}$ folgt $\gamma \le \dfrac{q}{2}$. Benutzt man außerdem die Voraussetzung (9.74), so bekommt man

$$\delta\Big(\frac{2+\gamma}{2-q} + 1 + \gamma\Big) \le \frac{\gamma(2-q)}{4}\Big(\frac{2+\gamma}{2-q} + 1 + \gamma\Big) =$$
$$= \frac{\gamma}{4}\Big(2+\gamma+(2-q)(1+\gamma)\Big) \le \gamma(1+\gamma) \le q.$$

Dies impliziert

$$q - \delta(1+\gamma) \ge \frac{\delta(2+\gamma)}{2-q}.$$

Beachtet man außerdem die Ungleichung

$$2q + \gamma \,\le\, q + 2 \,\le\, q' + q = q'q,$$

so ergibt sich unter Verwendung der Youngschen Ungleichung

$$\text{(9.92)} \qquad \operatorname{mes}(Q_R^*)\Big(1 + |u_{Q^*_{R/2}}|^{2q+\gamma}\Big) \,\le\, c\, R^{2+\frac{\delta(2+\gamma)}{2-q}}\Big(1 + \Phi(u; X_0, R)^{q'q}\Big).$$

Nach Einsetzen der Abschätzungen von I_1, I_2 und I_3 sowie (9.92) in (9.89) (mit $\Lambda = u_{Q^*_{R/2}}$) folgt

$$\begin{aligned}\int_{Q^*_{R/4}} &|u - u_{Q^*_{R/2}}|^{\gamma}(1 + |\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \,\le \\ &\le\, c\, R^{2+\frac{\delta(2+\gamma)}{2-q}}\Big(1 \,+\, \Phi(u; X_0, R)^{q'q}\Big) \,+\, \int_{Q^*_{R/4}} |u - u_{Q^*_{R/2}}|^{\gamma}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Hölderschen und Youngschen Ungleichung verifiziert man

$$\begin{aligned}\int_{Q^*_{R/4}} |u - u_{Q^*_{R/2}}|^{\gamma}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \,&\le\, \operatorname{mes}(Q^*_{R/4})^{1-\gamma/q}\bigg(\int_{Q^*_{R/4}} |u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\bigg)^{\gamma/q} \,\le \\ &\le\, c\, R^{q+\delta+2} \,+\, \int_{Q^*_R} |u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \,\le \\ &\le\, c\, R^{2+q}\Big(1 \,+\, \Phi(u; X_0, R)^q\Big) \,\le \\ &\le\, c\, R^{2+\frac{\delta(2+\gamma)}{2-q}}\Big(1 \,+\, \Phi(u; X_0, R)^{q'q}\Big).\text{[8]}\end{aligned}$$

Die Behauptung (9.75) ergibt sich nunmehr unmittelbar nach Kombination der letzten beiden Ungleichungen. ■

Beweis von Satz 9.3 - In den folgenden Betrachtungen bezeichnen $0 < \gamma < \min\{2(q-1), 2-q\}$ und R_0 die Zahlen aus Lemma 9.6. Außerdem sei $0 < \delta < \dfrac{\gamma(2-q)}{4}$ fixiert. Weiterhin seien $X_0 = \{x_0, t_0\} \in Q$ und $0 < R < \min\{\operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega), t_0^{1/(q+\delta)}, R_0\}$ so gewählt, daß die Kaplan-Bedingung

$$\text{(9.93)} \qquad \int_{t_0 - R^{q+\delta}}^{T} \frac{\|u(\cdot,t) - u(\cdot, t_0 - R^{q+\delta})\|^2_{L^2(B_R;\mathbb{R}^N)}}{t - t_0 + R^{q+\delta}}\,\mathrm{d}t \,<\, +\infty$$

[8] Man beachte: Aus $\frac{\delta(2+\gamma)}{2-q} \,\le\, \frac{4\delta}{2-q} \,\le\, \gamma \,\le\, q$ folgt $R^q \,\le\, R^{\frac{\delta(2+\gamma)}{2-q}}$.

erfüllt ist. Nach Satz 8.3 existiert dann genau eine schwache Lösung $v \in V_q^{1,0}(Q^*_{R/4};\mathbb{R}^N)$ des Dirichlet-Problems

$$\text{(9.94)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v^i}{\partial t} - D_\alpha A_i^\alpha(x_0, t_0, u_{Q^*_{R/2}}, \nabla v) \;=\; 0 \quad \text{in} \quad Q^*_{R/4} \quad (i = 1, \ldots, N) \\ u \;=\; v \quad \text{f.ü. in} \quad (\partial B_{R/4} \times (t_0 - (R/4)^{q+\delta}, t_0)) \cup (B_{R/4} \times \{t_0 - (R/4)\}). \end{cases}$$

1° *Abschätzung der Differenz* $w := u - v$: Kombination von (9.1) und (9.94) impliziert unter Benutzung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, daß w eine schwache Lösung des folgenden Systems ist:

$$\text{(9.95)}\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial w^i}{\partial t} \;-\; D_\alpha\Big(A_{ij}^{\alpha\beta}(x,t) D_\beta w^j\Big) \;= \\ &= D_\alpha\Big(A_i^\alpha(x,t,u,\nabla u) \;-\; A_i^\alpha(x_0,t_0,u_{Q^*_{R/2}},\nabla u)\Big) \;+\; B_i(x,t,u,\nabla u) \end{aligned}$$

in $Q^*_{R/4}$ $(i = 1, \ldots, N)$, wobei

$$A_{ij}^{\alpha\beta}(x,t) \;:=\; \int_0^1 \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial \xi_\beta^j}(x_0, t_0, u_{Q^*_{R/2}}, \nabla v(x,t) + s\nabla w(x,t))\,\mathrm{d}s \quad (\{x,t\} \in Q^*_{R/4}).$$

Unter Einführung des Steklov-Mittels, Anwendung partieller Integration und Beachtung der Bedingung (9.5) findet man

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-(R/4)^{q+\delta},t_0)} \int_{B_{R/4}} |w(\cdot,t)|^2\,\mathrm{d}x + \nu_0 \int_{Q^*_{R/4}} (1 + |\nabla u| + |\nabla w|)^{q-2} |\nabla w|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le& \\ \le \int_{Q^*_{R/4}} \Big|(A_i^\alpha(x,t,u\nabla u) \;-\; A_i^\alpha(x_0,t_0,u_{Q^*_{R/2}},\nabla u)) D_\alpha w^i\Big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t +& \\ + \int_{Q^*_{R/4}} |B_i(x,t,u,\nabla u) w^i|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.& \end{aligned}$$

Beachtet man außerdem die Bedingungen (9.2) und (9.6), so folgt

$$
\begin{aligned}
&\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-(R/4)^{q+\delta},t_0)} \int_{B_{R/4}} |w(\cdot,t)|^2 \,\mathrm{d}x \,+\, \nu_0 \int_{Q^*_{R/4}} (1+|\nabla u|+|\nabla w|)^{q-2}|\nabla w|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \,\leq \\
&\leq\, c\left(\int_{Q^*_{R/4}} \omega(2\sqrt{R}+|u-u_{Q^*_{R/2}}|)^{q'}(1+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/q'} \times \\
&\qquad\qquad \times\left(\int_{Q^*_{R/4}} |\nabla w|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/q} + \\
&\quad +\, c\left(\int_{Q^*_{R/4}} (1+|u|^{2q}+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{(2q-1)/2q}\left(\int_{Q^*_{R/4}} |w|^{2q}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/2q}.
\end{aligned}
\tag{9.96}
$$

Unter Verwendung der Hölderschen und der Youngschen Ungleichung mit einem beliebigen $0<\varepsilon<1$ bekommt man

$$
\begin{aligned}
&\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-(R/4)^{q+\delta},t_0)} \int_{B_{R/4}} |w(\cdot,t)|^2 \,\mathrm{d}x \,+\, \int_{Q^*_{R/4}} |\nabla w|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \,\leq \\
&\leq\, c\,\varepsilon^{-(2-q)/q}\Bigg(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-(R/4)^{q+\delta},t_0)} \int_{B_{R/4}} |w(\cdot,t)|^2 \,\mathrm{d}x + \\
&\qquad\qquad +\, \nu_0 \int_{Q^*_{R/4}} (1+|\nabla u|+|\nabla w|)^{q-2}|\nabla w|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Bigg) + \\
&\qquad +\, \varepsilon\int_{Q^*_R}(1+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \,\leq \\
&\leq\, c\,\varepsilon^{-(2-q)/q}\left(\int_{Q^*_{R/4}} \omega(2\sqrt{R}+|u-u_{Q^*_{R/2}}|)^{q'}(1+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/q'} \times \\
&\qquad\qquad \times\left(\int_{Q^*_{R/4}} |\nabla w|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/q} + \\
&\qquad +\, c\,\varepsilon^{-(2-q)/q}\left(\int_{Q^*_{R/4}} (1+|u|^{2q}+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{(2q-1)/2q} \times \\
&\qquad\qquad \times\left(\int_{Q^*_{R/4}} |w|^{2q}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/2q} \,+\, \varepsilon\int_{Q^*_R}(1+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
\tag{9.97}
$$

Als nächstes verifiziert man nach Anwendung von (6.5) zusammen mit der Poincaré-Ungleichung sowie der Youngschen Ungleichung

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_{Q^*_{R/4}} |w|^{2q}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/2q} \le \\
&\le c\left(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-(R/4)^{q+\delta},t_0)} \int_{B_{R/4}} |w(\cdot,t)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/4}\left(\int_{Q^*_{R/4}} |\nabla w|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/2q} \le \\
&\le c\left(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-(R/4)^{q+\delta},t_0)} \int_{B_{R/4}} |w(\cdot,t)|^2\,\mathrm{d}x + \int_{Q^*_{R/4}} |\nabla w|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{(q+2)/4q}.
\end{aligned}
\tag{9.98}
$$

Wir setzen (9.98) in (9.97) ein und wenden anschließend die Youngsche Ungleichung an. Berücksichtigt man außerdem die elementare Ungleichung

$$
\varepsilon^{-\frac{4(q-2)}{3q-2}} \le \varepsilon^{-\frac{2-q}{q-1}} \quad \forall\, 0<\varepsilon<1,
$$

so bekommt man die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
&\int_{Q^*_{R/4}} |\nabla w|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \\
&\qquad \le c\,\varepsilon^{-\frac{2-q}{q-1}}\left\{\int_{Q^*_{R/4}} \omega(2\sqrt{R}+|u-u_{Q^*_{R/2}}|)^{q'}(1+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\right.\\
&\qquad\qquad \left.+\left(\int_{Q^*_{R/4}} (1+|u|^{2q}+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{q/(3q-2)+1}\right\}+\\
&\qquad\qquad +\varepsilon\int_{Q^*_R} (1+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
\tag{9.99}
$$

(i) Wir definieren nun

$$
\mathcal{A} := \left\{X\in Q^*_{R/4}\,\middle|\,|u-u_{Q^*_{R/2}}| \le R^{\frac{\delta}{2(2-q)}}\right\}
$$

und betrachten die Zerlegung $Q^*_{R/4}=\mathcal{A}\cup(Q^*_{R/4}\setminus\mathcal{A})$. Dies impliziert

$$
\begin{aligned}
&\int_{Q^*_{R/4}} \omega(2\sqrt{R}+|u-u_{Q^*_{R/2}}|)^{q'}(1+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \\
&\quad \le \omega\Big(3R^{\frac{\delta}{2(2-q)}}\Big)^{q'}\int_{\mathcal{A}}(1+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\\
&\qquad + c\,R^{-\frac{\delta\gamma}{2(2-q)}}\int_{Q^*_{R/4}\setminus\mathcal{A}} |u-u_{Q^*_{R/2}}|^{\gamma}(1+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Hiermit ergibt sich unter Benutzung von (9.75)

$$\int_{Q^*_{R/4}} \omega(2\sqrt{R} + |u - u_{Q^*_{R/2}}|)^{q'}(1 + |\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le$$

(9.100)
$$\le c\,R^{2+\frac{2\delta}{2-q}}[\omega(3R^{\frac{\delta}{2(2-q)}})^{q'} + R^{\frac{\gamma\delta}{2(2-q)}}]\big(1 + \Phi(u;X_0,R)^{q'q}\big).$$

(ii) Weiterhin folgt aus (6.5) mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung

$$\int_{Q^*_R} |u|^{2q}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le c\,R^{\frac{q\gamma}{2+\gamma}}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-R^{q+\delta},t_0)} \int_{B_R} |u(\cdot,t)|^{2+\gamma}\,\mathrm{d}x\right)^{q/(2+\gamma)} \times$$

$$\times \int_{t_0-R^{q+\delta}}^{t_0} \left(\int_{B_R} |u(\cdot,t)|^{q^*}\,\mathrm{d}x\right)^{q/q^*} \mathrm{d}t \le$$

$$\le c\,R^{\frac{q\gamma}{2+\gamma}}\left(\int_{Q^*_R} |\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + R^{-q}\int_{Q^*_R} |u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right) \le$$

$$\le c\,R^{2+\frac{2\delta}{2-q}}(1 + R^{\frac{q\gamma}{2+\gamma}-\frac{2\delta}{2-q}})\Phi(u;X_0,R)^q \le$$

$$\le c\,R^{2+\frac{2\delta}{2-q}}\Phi(u;X_0,R)^q.$$ [9)]

Hieraus folgert man

(9.101)
$$\int_{Q^*_R} (1 + |\nabla u|^q + |u|^{2q})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le c\,R^{2+\frac{2\delta}{2-q}}\Phi(u;X_0,R)^q.$$

Die rechte Seite von (9.99) schätzen wir mit Hilfe von (9.100) und (9.101) nach oben ab

---

[9)] Wir notieren, daß unter den Voraussetzungen $0 < \delta < \dfrac{\gamma(q-2)}{4}$ und $0 < \gamma < 2(q-1)$ gilt: $\dfrac{q\gamma}{2+\gamma} - \dfrac{2\delta}{2-q} \ge 0$.

und wenden danach die Youngsche Ungleichung an. Dies liefert die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
(9.102)\qquad & (R/4)^{-2-\frac{2\delta}{2-q}} \int_{Q^*_{R/4}} |\nabla w|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le \\
&\le c\,\varepsilon^{-\frac{2-q}{q-1}} \Big\{ [\omega(3R^{\frac{\delta}{2(2-q)}})^{q'} + R^{\frac{\delta\gamma}{2(2-q)}}] + \\
&\quad + \Big(\int_{Q^*_R} (1+|u|^{2q} + |\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \Big)^{q/(3q-2)} \Big\} \Big(1+\Phi(u;X_0,R)^{q'q}\Big) + \\
&\quad + c\,\varepsilon\,\Phi(u;X_0,R)^q \;= \\
&= c\,\varepsilon^{-\frac{2-q}{q-1}} \Big\{ \cdots \Big\} \Big(1+\Phi(u;X_0,R)^{q'q}\Big) \;+\; c\,\varepsilon\Phi(u;X_0,R)^q.
\end{aligned}
$$

In (9.102) setzen wir

$$
\varepsilon := \Big\{ \cdots \Big\}^{q-1}
$$

und schließen

$$
\begin{aligned}
(R/4)^{-2-\frac{2\delta}{2-q}} \int_{Q^*_{R/4}} |\nabla w|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;&\le\; c \Big\{ \cdots \Big\}^{q-2} \Big\{ \cdots \Big\} \Big(1+\Phi(u;X_0,R)^{q'q}\Big) + \\
&\quad + c \Big\{ \cdots \Big\}^{q-1} \Phi(u;X_0,R)^q \;\le \\
&\le c \Big\{ \Big[\omega\Big(3R^{\frac{\delta}{2(2-q)}}\Big)^q + R^{\frac{\delta\gamma(q-1)}{2(2-q)}} \Big] + \\
&\quad + \Big(\int_{Q^*_R} (1+|u|^{2q} + |\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \Big)^{\frac{q(q-1)}{3q-2}} \Big\} \Big(1+\Phi(u;X_0,R)^{q'q}\Big).
\end{aligned}
$$

Auf der anderen Seite verifiziert man mit Hilfe der Poincaré-Ungleichung

$$
R^{-q-2} \int_{Q^*_{R/4}} |w|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le\; c\,R^{\frac{2\delta}{2-q}} \Phi(w;X_0,R)^q \;\le\; c\,R^{\frac{\delta\gamma(q-1)}{2(2-q)}} \Phi(w;X_0,R)^{q'q}.
$$

Nach Kombination der letzten beiden Ungleichungen schließt man

$$
(9.103)\qquad \Phi(w;X_0,R/4) \;\le\; \Theta_1(X_0,R,\Phi(u;X_0,R)),
$$

wobei $\Theta_1 : Q' \times [0,R_0) \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ definiert ist durch

$$\begin{aligned}\Theta_1(X_0,\sigma,s) \,:=\, C_3\Big\{&[\omega(3\sigma^{\frac{\delta}{2(2-q)}}) + \sigma^{\frac{\delta\gamma}{2q'(2-q)}}] + \\ &+\Big(\int_{Q^*_\sigma}(1+|u|^{2q}+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{q-1}{3q-2}}\Big\}\Big(1+s^{q'}\Big)\end{aligned}$$

$(\{X_0,\sigma,s\} \in Q' \times [0,R_0) \times [0,+\infty); C_3 = \text{const} > 0)$. Wie man sich leicht klarmacht, ist $\Theta_1(X_0,\sigma,s)$ im ersten Argument stetig, was aus der Absolutstetigkeit des Lebesgue-Integrals folgt, und im zweiten sowie im dritten Argument nicht fallend. Außerdem gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $0 < \sigma_\varepsilon < \operatorname{dist}(Q',\partial Q)$, so daß

$$\Theta_1(X_0,\sigma,1) \,\le\, \varepsilon \quad \forall\, 0 < \sigma \,\le\, \sigma_\varepsilon, \quad \forall\, X_0 \in Q'. \tag{9.104}$$

2° *Caccioppoli-Ungleichung für* ∇v: Mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung erkennt man, daß v eine schwache Lösung des folgenden Systems ist:

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} - D_\alpha\Big(A^{\alpha\beta}_{ij(0)}(x,t)D_\beta v^j\Big) \,=\, 0 \quad \text{in} \quad Q^*_{R/4} \quad (i=1,\dots,N),$$

wobei

$$A^{\alpha\beta}_{ij(0)}(x,t) := \int_0^1 \frac{\partial A^\alpha_i}{\partial \xi^j_\beta}(x_0,t_0,u_{Q^*_{R/2}},s\nabla v(x,t))\,\mathrm{d}s \quad (\{x,t\} \in Q^*_{R/4})$$

$(\alpha,\beta = 1,\dots,n; i,j = 1,\dots,N)$.

Sei $t_1 \in (t_0 - (R/4)^{q+\delta}, t_0)$. Wie oben bekommt man nach Einführung des Steklov-Mittels

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{B_{R/4}} \frac{\partial v^i_\lambda}{\partial t}(x,t)\psi^i(x)\,\mathrm{d}x \,+\, \int_{B_{R/4}} (A^{\alpha\beta}_{ij(0)}D_\beta v^j)_\lambda(x,t)D_\alpha\psi^i(x)\,\mathrm{d}x \,=\, 0 \\ \text{ffa. } t \in (t_0-(R/4)^{q+\delta},t_1), \text{ für alle } \lambda \in (0,t_0-t_1) \\ \text{und alle } \psi \in W^1_q(B_{R/4};\mathbb{R}^N) \quad \text{mit } \psi = 0 \quad \text{f.ü. auf } \partial B_{R/4}\end{cases} \tag{9.105}$$

(vgl. [Naumann and Wolff, M. (1994)], [Naumann et al. (1998)]).

Seien $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < R/4$ beliebig, aber fixiert. Sei $\zeta \in C^\infty_c(B_{\sigma_2})$ eine Schnittfunktion, so daß $\zeta(x) = 1$ für alle $x \in B_{\sigma_1}$ und $0 \le \zeta(x) \le 1$, $|\nabla\zeta(x)| \le \dfrac{c_0}{\sigma_2-\sigma_1}$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$, und sei $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ eine Funktion mit $\rho(t) = 0$ für alle $t \in (-\infty, t_0 - \sigma_2^{q+\delta}]$, $\rho(t) = 1$ für alle $t \in [t_0 - \sigma_1^{q+\delta}, +\infty)$ und $0 \le \rho(x) \le 1$, $0 \le \rho'(x) \le \dfrac{c_0}{(\sigma_2-\sigma_1)^{q+\delta}}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ $(c_0 = \text{const})$.

Dann ist die Funktion $\psi(x) = v_\lambda(x,t)\zeta^2(x)\rho(t)$ $(x \in B_{R/4}, t \in (t_0 - (R/4)^{q+\delta}, t_1))$ $(\lambda \in (0, t_0 - t_1))$ für (9.105) zulässig. Wir integrieren beide Seiten der Identität (9.105) über das Intervall $(t_0 - (R/4)^{q+\delta}, t)$ $(t \in (t_0 - (R/4)^{q-\delta}, t_1))$, verwenden partielle Integration und führen anschließend den Grenzübergang $\lambda \to 0$ aus. Dies liefert unter Berücksichtigung der Bedingung (9.5)

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{B_{R/4}} |v(\cdot,t)|\zeta^2\rho(t)\,\mathrm{d}x + \\
&\qquad + \nu_0 \int_{t_0-(R/4)^{q+\delta}}^{t} \int_{B_{R/4}} (1+|\nabla v|)^{q-2}|\nabla v|^2\zeta^2\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s = \\
&\quad \le -2\int_{t_0-(R/4)^{q+\delta}}^{t} \int_{B_{R/4}} A_i^\alpha(x_0,t_0,u_{Q^*_{R/2}},\nabla v)v^i(D_\alpha\zeta)\zeta\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + \\
&\qquad + \int_{t_0-(R/4)^{q+\delta}}^{t} \int_{B_{R/4}} |v|^2\zeta^2\rho'\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
\tag{9.106}
$$

Beachtet man die Bedingungen (9.2) und (9.4), so folgt unter Benutzung der Hölderschen und der Youngschen Ungleichung

$$
\begin{aligned}
&\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-\sigma_1^{q+\delta},t_0)} \int_{B_{\sigma_1}} |v(\cdot,t)|^2\,\mathrm{d}x \,+\, \nu_0\int_{Q^*_{\sigma_1}} (1+|\nabla v|)^{q-2}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \\
&\quad \le c\,(\sigma_2-\sigma_1)^{-q}\int_{Q^*_{\sigma_2}} |v|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \\
&\qquad + c\,(\sigma_2-\sigma_1)^{-q-\delta}\int_{Q^*_{\sigma_2}} |v|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \,+\, \mathrm{mes}(Q^*_R),
\end{aligned}
\tag{9.107}
$$

wobei $c = \mathrm{const}$ weder von σ_1 noch von σ_2 abhängt.

Mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung und der Abschätzung (6.3) (siehe Anmerkung 6.1) folgert man

$$
\begin{aligned}
\sigma_2^{-q-\delta}\int_{Q^*_{\sigma_2}} |v|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \,\le\, c\,\sigma_2^2\,\mathrm{mes}(Q^*_{\sigma_2})^{-1/q}\Big(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-\sigma_2^{q+\delta},t_0)} \int_{B_{\sigma_2}} |v(\cdot,t)|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2} \times \\
\times\Big(\int_{Q^*_{\sigma_2}} |\nabla v|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \,+\, \sigma_2^{-q}\int_{Q^*_{\sigma_2}} |v|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{1/q}.
\end{aligned}
$$

Benutzt man diese Ungleichung, um die rechte Seite von (9.107) weiter abzuschätzen, und wendet man zusätzlich die Youngsche Ungleichung an, so folgt

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-\sigma_1^{q+\delta},t_0)} \int_{B_{\sigma_1}} |v(\cdot,t)|^2\,\mathrm{d}x \;+\; \nu_0 \int_{Q^*_{\sigma_1}} (1+|\nabla v|)^{q-2}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le\\
&\quad\le\; c\,(\sigma_2-\sigma_1)^{-q}\int_{Q^*_{\sigma_2}} |v|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,+\\
&\qquad+\; c\,\sigma_2^4\,\mathrm{mes}(Q^*_{\sigma_2})^{-2/q}\Big(\frac{\sigma_2}{\sigma_2-\sigma_1}\Big)^{2(q+\delta)}\times\\
&\qquad\qquad\times\Big(\int_{Q^*_{\sigma_2}} |\nabla v|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;+\; \sigma_2^{-q}\int_{Q^*_{\sigma_2}} |v|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{2/q} +\\
&\qquad+\; c\;\mathrm{mes}(Q^*_{\sigma_2}) \;+\; \frac{1}{2}\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-\sigma_2^{q+\delta},t_0)}\int_{B_{\sigma_2}} |v(\cdot,t)|^2\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

und nach Anwendung von Lemma A.3 erhält man

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-(R/8)^{q+\delta},t_0)} \int_{B_{R/8}} |v(\cdot,t)|^2\,\mathrm{d}x \;+\; \nu_0 \int_{Q^*_{R/8}} (1+|\nabla v|)^{q-2}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le\\
&\quad\le\; c\,R^{-q}\int_{Q^*_{R/4}} |v|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,+\\
&\qquad+\; c\,R^4\,\mathrm{mes}(Q^*_R)^{-2/q}\Big(\int_{Q^*_{R/4}} |\nabla v|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{2/q} +\\
&\qquad+\; c\,R^2\,\mathrm{mes}(Q^*_R)^{-2/q}\Big(\int_{Q^*_{R/4}} |v|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{2/q} \;+\; c\;\mathrm{mes}(Q^*_R).
\end{aligned}\tag{9.108}$$

3° *Caccioppoli-Ungleichungen für* D^2v: Wie in Abschnitt 6.2 bewiesen wurde, gilt für beliebige $0 < \sigma < R/4$:

$$(1+|\nabla v|)^{(q-2)/2} D_\alpha D_\beta v \in L^2(Q^*_\sigma;\mathbb{R}^N) \quad (\alpha,\beta = 1,2),\tag{9.109}$$

$$\nabla v \in L^\infty(t_0-\sigma^{q+\delta}, t_0; L^2(B_\sigma;\mathbb{R}^{nN})).\tag{9.110}$$

Nun seien $R/8 \le \sigma_1 < \sigma_2 \le R/4$ beliebig gewählt. In (8.11) (mit $\gamma = 0$) seien die Schnittfunktionen $\zeta \in C^\infty_c(\mathbb{R}^2)$ und $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ wie in 2° definiert. Dann liefert (8.11) nach Ausführung des Grenzüberganges $h \to 0$ die folgende Caccioppoli-Ungleichung:

$$\begin{aligned}&\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-\sigma_1^{q+\delta},t_0)}\int_{B_{\sigma_1}}|\nabla v(\cdot,t)|^2\,\mathrm{d}x+\nu_0\int_{Q^*_{\sigma_1}}(1+|\nabla v|)^{q-2}|D^2v|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\ \le\\ &\le\ c\,(\sigma_2-\sigma_1)^{-2}\int_{Q^*_{\sigma_2}}(1+|\nabla v|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+c\,(\sigma_2-\sigma_1)^{-q-\delta}\int_{Q^*_{\sigma_2}}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{9.111}$$

wobei $c=\text{const}>0$ nur von $c_0/\nu_0, q$ und N abhängt.

Wendet man zuerst Lemma A.1 (mit $p_0=q, p_1=2q$ und $\theta=2-q$) und anschließend (6.3) an, so folgt

$$\begin{aligned}&\|\nabla v\|^2_{L^2(Q^*_{\sigma_2};\mathbb{R}^{nN})}\ \le\ \|\nabla v\|^{2(q-1)}_{L^q(Q^*_{\sigma_2};\mathbb{R}^{nN})}\|\nabla v\|^{2(2-q)}_{L^{2q}(Q^*_{\sigma_2};\mathbb{R}^{nN})}\ \le\\ &\quad\le\ c\,\|\nabla v\|^{2(q-1)}_{L^q(Q^*_{\sigma_2};\mathbb{R}^{nN})}\|\nabla v\|^{2-q}_{L^\infty(t_0-\sigma_2^{q+\delta},\sigma_2^{q+\delta};L^2(B_{\sigma_2}\mathbb{R}^{nN}))}\times\\ &\qquad\times\Big(\|D^2v\|_{L^q(Q_{\sigma_2};\mathbb{R}^{nN})}\ +\ \sigma_2^{-1}\|\nabla v\|_{L^q(Q_{\sigma_2};\mathbb{R}^{nN})}\Big)^{2-q}\ \le\\ &\quad\le\ c\,\sigma_2^{q-2}\|\nabla v\|^q_{L^q(Q^*_{\sigma_2};\mathbb{R}^{nN})}\|\nabla v\|^{2-q}_{L^\infty(t_0-\sigma_2^{q+\delta},\sigma_2^{q+\delta};L^2(B_{\sigma_2}\mathbb{R}^{nN}))}+\\ &\qquad+\ \|\nabla v\|^{2(q-1)}_{L^q(Q^*_{\sigma_2};\mathbb{R}^{nN})}\|\nabla v\|^{2-q}_{L^\infty(t_0-\sigma_2^{q+\delta},\sigma_2^{q+\delta};L^2(B_{\sigma_2}\mathbb{R}^{nN}))}\|D^2v\|^{q-2}_{L^q(Q_{\sigma_2};\mathbb{R}^{nN})}.\end{aligned}$$

Hieraus schließt man mit Hilfe der Hölderschen und der Youngschen Ungleichung

$$\begin{aligned}&c\,(\sigma_2-\sigma_1)^{-q-\delta}\int_{Q^*_{\sigma_2}}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\ \le\\ &\le\ c\,\frac{\sigma_2^{q-2}}{(\sigma_2-\sigma_1)^{q+\delta}}\int_{Q^*_{\sigma_2}}|\nabla v|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-\sigma_2^{q+\delta},t_0)}\int_{B_{\sigma_2}}|\nabla v(\cdot,t)|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{(2-q)/2}+\\ &\qquad+\ c\Big(\frac{\sigma_2}{\sigma_2-\sigma_1}\Big)^{q+\delta}\sigma_2^{-q-\delta}\Big(\int_{Q^*_{\sigma_2}}(1+|\nabla v|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{q/2}\times\\ &\quad\times\Big(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-\sigma_2^{q+\delta},t_0)}\int_{B_{\sigma_2}}|\nabla v(\cdot,t)|^2\,\mathrm{d}x\ +\ \int_{Q^*_{\sigma_2}}(1+|\nabla v|)^{q-2}|D^2v|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{2-q}\ \le\\ &\le\ c\Big(\frac{\sigma_2}{\sigma_2-\sigma_1}\Big)^{\frac{q+\delta}{q-1}}R^{-2}(1+\Phi(v;X_0,R/4))^{\frac{q'-q}{2}}\int_{Q^*_{\sigma_2}}|\nabla v|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\\ &\quad+\ \frac{1}{2}\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-\sigma_2^{q+\delta},t_0)}\int_{B_{\sigma_2}}|\nabla v(\cdot,t)|^2\,\mathrm{d}x\ +\ \frac{\nu_0}{2}\int_{Q^*_{\sigma_2}}(1+|\nabla v|)^{q-2}|D^2v|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Nach Einsetzen der soeben bewiesenen Abschätzung in (9.111) und Anwendung des technischen Lemmas A.3 bekommt man für beliebige $R/8 \le \sigma < R/4$

$$\text{(9.112)} \qquad \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-\sigma^{q+\delta},t_0)} \int_{B_\sigma} |\nabla v(\cdot,t)|^2 \,\mathrm{d}x \;+\; \int_{Q^*_\sigma} (1+|\nabla v|)^{q-2}|D^2 v|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le$$

$$\le\; c\left(\frac{R}{R-\sigma}\right)^{\frac{q+\delta}{q-1}} R^{-2}\Big(1+\Phi(v;X_0,R/4)^{\frac{q'-q}{2}}\Big)\int_{Q^*_{R/4}} (1+|\nabla v|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

4° *Verbesserte Caccioppoli-Ungleichung für D^2v:* Seien $R/8 \le \sigma_1 < \sigma_2 \le 3R/16$. Sei $p > 2$ so gewählt, daß

$$p-2 \;<\; \frac{\nu_0(q-1)}{32c_0}.$$

Wie oben erhält man aus (8.11) (mit $\gamma := p-2$) nach Ausführung des Grenzüberganges $h \to 0$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-\sigma_1^{q+\delta},t_0)} \int_{B_{\sigma_1}} |\nabla v(\cdot,t)|^p \,\mathrm{d}x \;\le$$

$$\text{(9.113)} \qquad \le\; c\,(\sigma_2-\sigma_1)^{-2}\int_{Q^*_{\sigma_2}} (1+|\nabla v|)^{q+p-2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \,+$$

$$+\,c\,(\sigma_2-\sigma_1)^{-q-\delta}\int_{Q^*_{\sigma_2}} |\nabla v|^p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;=\; I_1+I_2,$$

wobei $c = \text{const} > 0$ nur von $c_0/\nu_0, q$ und von N abhängt.

(i) Mit Hilfe der Hölderschen und der Youngschen Ungleichung erhält man

$$I_1 \;\le\; c\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}\right)^2 \sigma_2^{(q-2)(1-2/p)+\delta}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-\sigma_2^{q+\delta},t_0)} \int_{B_{\sigma_2}} |\nabla v(\cdot,t)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{(q+p-2)/p} \;\le$$

$$\le\; c\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}\right)^{\frac{2p}{2-q}} \sigma_2^{2-p+\frac{p\delta}{2-q}} \;+\; \frac{1}{4}\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-\sigma_2^{q+\delta},t_0)} \int_{B_{\sigma_2}} |\nabla v(\cdot,t)|^p\,\mathrm{d}x.$$

(ii) Für die Abschätzung des Integrals I_2 verwenden wir die Höldersche Ungleichung und (6.3). Anschließend wenden wir die Youngsche Ungleichung an. Dies liefert

$$I_2 \;\le\; c\,\sigma_2^{-q-\delta}\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_2-\sigma_1}\right)^{q+\delta} \operatorname{mes}(Q^*_R)^{1-p/2q}\left(\int_{Q^*_{\sigma_2}} |\nabla v|^{2q}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{p/2q} \;\le$$

$$\leq \sigma_2^{1-\frac{p(2+\delta)}{2q}} \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_2-\sigma_1}\right)^{q+\delta} \left(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-\sigma_2^{q+\delta},t_0)} \int_{B_{\sigma_2}} |\nabla v(\cdot,t)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\sigma^{-q} \int_{Q^*_{\sigma_2}} |\nabla v|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{Q^*_{\sigma_2}} |D^2 v|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{p/2q} \leq$$

$$\leq c \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}\right)^{2(q+\delta)} \sigma_2^{2-p-\frac{p(2+\delta)}{q}} \left(\int_{Q^*_{R/4}} |\nabla v|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{p/q} +$$

$$+ c \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}\right)^{2(q+\delta)} \sigma_2^{2-\frac{p(2+\delta)}{q}} \left(\int_{Q^*_{\sigma_2}} |D^2 v|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{p/q} +$$

$$+ \frac{1}{4} \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-\sigma_2^{q+\delta},t_0)} \int_{B_{\sigma_2}} |\nabla v(\cdot,t)|^p \,\mathrm{d}x.$$

Setzt man die Abschätzungen von I_1 und I_2 in (9.113) ein, wendet man Lemma A.3 und anschließend die Höldersche Ungleichung an, so ergibt sich

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-(R/8)^{q+\delta},t_0)} \int_{B_{R/8}} |\nabla v(\cdot,t)|^p \,\mathrm{d}x \leq$$

$$\leq c\, R^{2-p+\frac{p\delta}{2-q}} + c\, R^{2-p-\frac{p(2+\delta)}{q}} \left(\int_{Q^*_{3R/16}} |\nabla v|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{p/q} +$$

$$+ c\, R^{2-\frac{p(2+\delta)}{q}} \left(\int_{Q^*_{3R/16}} |D^2 v|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{p/q} \leq$$

$$\leq c\, R^{2-p+\frac{p\delta}{2-q}} + R^{2-p-\frac{p(2+\delta)}{q}} \int_{Q^*_{3R/16}} |\nabla v|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t +$$

$$+ c\, R^{2-\frac{p(2+\delta)}{q}} \left(\int_{Q^*_{3R/16}} (1+|\nabla v|^q) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{p(2-q)/(2q)} \times$$

$$\times \left(\int_{Q^*_{3R/16}} (1+|\nabla u|)^{q-2} |D^2 v|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{p/2}.$$

Hieraus folgt unter Benutzung von (9.112)

$$
\begin{aligned}
&\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-(R/8)^{q+\delta},t_0)} \int_{B_{R/8}} |\nabla v(\cdot,t)|^p \,\mathrm{d}x \le \\
&\le c\,R^{2-p+\frac{p\delta}{2-q}} + c\,R^{2-p-\frac{p(2+\delta)}{q}} \Big(1+\Phi(v;X_0,R/4)^{\frac{p(q'-q)}{4}}\Big)\times \\
&\qquad \times \Big(\int_{Q^*_{R/4}} (1+|\nabla v|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{p/q}.
\end{aligned}
\tag{9.114}
$$

5° *Fundamentale Abschätzung*: a) Sei $0<\tau<\frac{1}{8}$ beliebig, aber fixiert. Mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung bekommt man

$$
\begin{aligned}
&\int_{Q^*_{\tau R}} |\nabla v|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le (\tau R)^{2+\delta}\Big(\operatorname*{ess\,sup}_{(t_0-(R/8)^{q+\delta},t_0)} \int_{B_{R/8}} |\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{q/2} \le \\
&\qquad \le (\tau R)^{2+\delta+q(p-2)/p}\Big(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-(R/8)^{q+\delta},t_0)} \int_{B_{R/8}} |\nabla v(\cdot,t)|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{q/p}.
\end{aligned}
\tag{9.115}
$$

Die rechte Seite von (9.115) können wir mit Hilfe von (9.114) weiter abschätzen. Dies impliziert

$$
\begin{aligned}
&(\tau R)^{-2-\frac{2\delta}{2-q}} \int_{Q^*_{\tau R}} |\nabla v|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \\
&\le c\,\tau^{\delta-\frac{2\delta}{2-q}+\frac{q(2-p)}{p}} R^{-2-\frac{2\delta}{2-q}} \Big\{R^{2+\delta+\frac{q\delta}{2-q}} + \\
&\qquad + \Big(1+\Phi(v;X_0,R/4)^{\frac{q(q'-q)}{4}}\Big)\int_{Q^*_{R/4}} |\nabla v|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big\} \le \\
&\le c\,\tau^{\frac{q(2-p)}{p}-\frac{q\delta}{2-q}} \Big(1+\Phi(v;X_0,R/4)^{\frac{q(q'-q)}{4}+q}\Big).
\end{aligned}
\tag{9.116}
$$

b) Ähnlich wie in den obigen Betrachtungen schließt man unter Benutzung der Hölderschen Ungleichung und des Sobolevschen Einbettungssatzes

$$
\begin{aligned}
\int_{Q^*_{\tau R}} |v|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;&\le\; c\,(\tau R)^{q+2+\delta/2}\Bigg(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-(R/8)^{q+\delta},t_0)} \int_{B_{R/8}} |v(\cdot,t)|^{4q/\delta}\,\mathrm{d}x\Bigg)^{\delta/4} \;\le \\
&\le\; c\,\tau^{q+2+\delta/2}R^{-q}\,\mathrm{mes}(Q^*_R)\Bigg(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-(R/8)^{q+\delta},t_0)} \int_{B_{R/8}} |v(\cdot,t)|^{2}\,\mathrm{d}x\Bigg)^{q/2} + \\
&\quad +\; c\,\tau^{q+2+\delta/2}\,\mathrm{mes}(Q^*_R)\Bigg(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0-(R/8)^{q+\delta},t_0)} \int_{B_{R/8}} |\nabla v(\cdot,t)|^{2}\,\mathrm{d}x\Bigg)^{q/2} = \\
&=\; I_1 \,+\, I_2.
\end{aligned}
\tag{9.117}
$$

Wir schätzen das Integral I_1 mit Hilfe von (9.108) ab und erhalten

$$
\begin{aligned}
(\tau R)^{-2-q}I_1 \;&\le\; c\,\tau^{\delta/2}R^{\delta/2}\Bigg(R^{-2-q}\int_{Q^*_{R/4}} |v|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Bigg)^{q/2} + \\
&\quad +\; c\,\tau^{\delta/2}\Bigg(R^{-2}\int_{Q^*_{R/4}} |\nabla v|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \,+\, R^{-2-q}\int_{Q^*_{R/4}} (1+|v|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Bigg) \le \\
&\le\; c\,\tau^{\delta/2}\Phi(v;X_0,R/4)^q.
\end{aligned}
$$

Auf der anderen Seite bekommt man unter Verwendung von (9.112)

$$
\begin{aligned}
(\tau R)^{-2-q}I_2 \;&\le\; c\,\tau^{\delta/2}R^{\delta-q}\Big(1+\Phi(v;X_0,R/4)^{\frac{q(q'-q)}{4}}\Big)\Bigg(\int_{Q^*_{R/4}} |\nabla v|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Bigg)^{q/2} \le \\
&\le\; c\,\tau^{\delta/2}\Big(1+\Phi(v;X_0,R/4)^{\frac{q(q'-q)}{4}}\Big) \times \\
&\qquad\qquad \times\, R^{\delta}\Bigg(R^{-2-\frac{2\delta}{2-q}}\int_{Q^*_{R/4}} |\nabla v|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Bigg)^{q/2} \le \\
&\le\; c\,\tau^{\delta/2}\Big(1+\Phi(v;X_0,R/4)^{\frac{q(q'-q)}{4}}\Big)\Phi(v;X_0,R/4)^q.
\end{aligned}
$$

Nach Einsetzen der letzten beiden Abschätzungen in die rechte Seite von (9.117) findet man

$$
(\tau R)^{-2-q}\int_{Q^*_{\tau R}} (1+|v|)^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;\le\; c\tau^{\delta/2}\Big(1+\Phi(v;X_0,R/4)^{\frac{q(q'-q)}{4}}\Big)\Phi(v;X_0,R/4)^q,
\tag{9.118}
$$

wobei $c = \mathrm{const} > 0$ nur von $c_0/\nu_0, q$ und N abhängt.

Nun wählen wir $0 < \delta < \frac{\gamma(2-q)}{4}$ so klein, daß

$$\frac{q(p-2)}{p} - \frac{q\delta}{2-q} \geq \frac{\delta}{2}. \tag{9.119}$$

Kombiniert man die beiden Abschätzungen (9.116) und (9.118) und berücksichtigt man die Bedingung (9.119), so folgt

$$\Phi(v; X_0, \tau R) \leq \tau^{\frac{\delta}{2q}} \Theta_2(\Phi(v; X_0, R/4)), \tag{9.120}$$

wobei

$$\Theta_2(s) = C_4\Big(1 + s^{\frac{q'-q}{4}+1}\Big) \quad (s \in [0, +\infty))$$

($C_4 = \text{const} \leq 1$). Offensichtlich ist $\Theta_2 : [0, +\infty) \to [1, +\infty)$ strikt wachsend.

Wir erinnern daran, daß die fundamentale Abschätzung (9.120) zunächst nur für den Fall bewiesen wurde, wo u im Punkt $t_0 - R^{q+\delta}$ der Kaplan-Bedingung (9.93) genügt, was nach Lemma 6.5 für fast alle $t_0 \in (0, T)$ zutrifft. Beachtet man jedoch daß die Konstante in (9.120) nicht von der Wahl des Punktes t_0 abhängt, so schließt man unter Benutzung der Absolutstetigkeit für das Lebesgue-Integral, daß die Abschätzung (9.120) für beliebige $t_0 \in (0, T)$ gültig ist.

6° *Standarditeration*: Wir beginnen mit der Definition der Singulärmenge, vermöge

$$\Sigma := \Big\{X_0 \in Q' \,\Big|\, \liminf_{R \to 0^+} \Phi(u; X_0, R) \geq 1\Big\}.$$

Sei $X_0 \in Q' \setminus \Sigma$ beliebig fixiert. Dann wählen wir $0 < \tau < \frac{1}{8}$, so daß

$$\tau^{\frac{\delta}{2q}} \Theta_2(65) \leq \frac{1}{2}. \tag{9.121}$$

Aus (9.104) folgt außerdem die Existenz einer Zahl $0 < R_1 \leq R_0$ mit der Eigenschaft

$$\Theta_1(Y, \sigma, 1) < \frac{\tau^3}{2} \quad \forall\, 0 < \sigma < R_1, \quad \forall\, Y \in Q'. \tag{9.122}$$

Weiter wählen wir $0 < R_2 \leq R_1$, so daß

$$\Phi(u; X_0, R_2) < 1.$$

Wegen der Absolutstetigkeit des Lebesgue-Integrals gibt es ein $r \in (0, \operatorname{dist}(X_0, \partial Q) - R_2$, so daß für alle $Y \subset Q_r(X_0) \cap Q'$ gilt:

$$\Phi(u; Y, R_2) \leq 1. \tag{9.123}$$

Sei nun $Y \in Q_r(X_0) \cap Q'$ beliebig fixiert. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung und Anwendung der Abschätzungen (9.103) und (9.120) findet man

$$\begin{aligned}\Phi(u; Y, \tau R_2) &\leq \Phi(v; Y, \tau R_2) + \tau^{-3}\Phi(w; Y, R_2/4) \leq \\ &\leq \tau^{\frac{\delta}{2q}}\Theta_2(\Phi(v; Y, R_2/4)) + \tau^{-3}\Theta_1(Y, R_2, \Phi(u; Y, R_2))\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\Phi(v; Y, R_2/4) &\leq \Phi(u; Y, R_2/4) + \Phi(w; Y, R_2/4) \leq \\ &\leq 64\Phi(u; Y, R_2) + \Theta_1(Y, R_2, \Phi(u; Y, R_2)).\end{aligned}$$

Kombiniert man die letzten beiden Ungleichungen, und beachtet man (9.121), (9.122) und (9.123), so folgt

$$\begin{aligned}\Phi(u; Y, \tau R_2) &\leq \tau^{\frac{\delta}{2q}}\Theta_2(64\Phi(u; Y, R_2) + \Theta_1(Y, R_2, 1)) + \tau^{-3}\Theta_1(Y, R_2, 1) \leq \\ &\leq \tau^{\frac{\delta}{2q}}\Theta_1(65) + \frac{1}{2} \leq 1.\end{aligned}$$

Wir können also die obige Argumentation beliebig oft iterativ anwenden. Dies impliziert

$$\Phi(u; Y, \tau^k R_2) \leq 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \forall\, Y \in Q_r(X_0) \cap Q'. \tag{9.124}$$

Standardgemäß erhält man schließlich

$$\int_{Q^*_\sigma(Y)} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leq c\,\sigma^{2+\frac{2\delta}{2-q}} \quad \forall\, 0 < \sigma \leq R_2, \quad \forall\, Y \in Q_r(X_0) \cap Q' \tag{9.125}$$

mit einer von σ und Y unabhängigen Konstante c. Mit Hilfe von Lemma 9.5 kann man sich nun leicht klarmachen, daß u auf einer Umgebung des Punktes X_0 Hölder-stetig ist, was die partielle Hölder-Stetigkeit von u beweist.

7° *Abschätzung des Hausdorff-Maßes der Singulärmenge* Σ: Wir setzen

$$\Sigma' = \left\{ X_0 \in Q' \mid \limsup_{\sigma \to 0^+} \sigma^{-2-\frac{2\delta}{2-q}} \int_{Q^*_\sigma} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t > 0 \right\}$$

und zeigen zunächst

$$\Sigma \subset \Sigma'. \tag{9.126}$$

Diese Aussage ist erfüllt, genau dann wenn $Q' \setminus \Sigma' \subset Q' \setminus \Sigma$. Sei nun $X_0 \in Q' \setminus \Sigma'$ beliebig gewählt. Für $0 \le \xi < q + \delta + 2$ und $0 < \sigma < \operatorname{dist}(Q', \partial Q)$ definieren wir

$$\Psi_\xi(X_0, \sigma) := \left(\sigma^{-\xi} \int_{Q_\sigma^*} |u - u_{Q_\sigma^*}|^q \, dx \, dt \right)^{1/q},$$

$$\mathcal{M}_\xi(X_0, \sigma) := \left(\sigma^{-\xi} \int_{Q_\sigma^*} (1 + |u|^q) \, dx \, dt \right)^{1/q}.$$

Wir setzen $\mu_0 := q + \delta + 2$. Mit der gleichen Argumentation, wie im Beweis von Lemma 9.1 erhält man für beliebige $0 < \sigma < \operatorname{dist}(Q', \partial Q)$

$$\left| \mathcal{M}_{\mu_0}(X_0, \sigma/2) - \mathcal{M}_{\mu_0}(X_0, \sigma) \right| \le \lambda_0 \Psi_{\mu_0}(X_0, \sigma) \tag{9.127}$$

($\lambda_0 = \text{const}$ unabhängig von σ). Andererseits gibt es nach Voraussetzung ein $0 < \sigma_0 < \operatorname{dist}(Q', \partial Q)$, derart daß

$$\sigma^{-2-\frac{2\delta}{2-q}} \int_{Q_\sigma^*} |\nabla u|^q \, dx \, dt \le 1 \quad \forall\, 0 < \sigma \le \sigma_0. \tag{9.128}$$

Mit Hilfe der Poincaré-Ungleichung (9.72) zusammen mit (9.128) bekommt man

$$\Psi_{\mu_0}(X_0, \sigma/2) \le \lambda_1 \sigma^{\delta/2} \mathcal{M}_{\mu_0}(X_0, \sigma) \quad \forall\, 0 < \sigma \le \sigma_0, \tag{9.129}$$

wobei $\lambda_1 = \text{const} > 0$ unabhängig von σ ist. Unter Benutzung der Dreiecksungleichung und Anwendung der Ungleichungen (9.127) und (9.129) erhält man für beliebige $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mu_0}(X_0, 2^{-k}\sigma_0) &\le \sum_{i=2}^{k} |\mathcal{M}_{\mu_0}(X_0, 2^{-i}\sigma_0) - \mathcal{M}_{\mu_0}(X_0, 2^{-i+1}\sigma_0)| + \mathcal{M}_{\mu_0}(X_0, \sigma_0/2) \le \\ &\le \lambda_0 \sum_{i=1}^{k-1} \Psi_{\mu_0}(X_0, 2^{-i}\sigma_0) + \mathcal{M}_{\mu_0}(X_0, \sigma_0/2) \le \\ &\le \lambda_0 \lambda_1 \sigma_0^{\delta/2} \sum_{i=0}^{k-2} 2^{-i\delta/2} \mathcal{M}_{\mu_0}(X_0, 2^{-i}\sigma_0) + \mathcal{M}_{\mu_0}(X_0, \sigma_0/2). \end{aligned} \tag{9.130}$$

Nun nehmen wir an, daß für ein $0 \le \xi_0 \le \mu_0 - q\delta/4$ gilt:

$$\sup_{0<\sigma\le\sigma_0} \mathcal{M}_{\xi_0}(X_0, \sigma) \le C_0 < +\infty. \tag{9.131}$$

Dann folgert man aus (9.130)

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\xi_0+q\delta/4}(X_0,2^{-k}\sigma_0) \;&=\; 2^{-k(\mu_0-\xi_0-q\delta/4)/q}\sigma_0^{(\mu_0-\xi_0-q\delta/4)/q}\mathcal{M}_{\mu_0}(X_0,2^{-k}\sigma_0) \;\le\\ &\le\; \lambda_0\lambda_1\sigma_0^{\delta/4}\sum_{i=0}^{k-2}2^{-i\delta/4}\mathcal{M}_{\xi_0}(X_0,2^{-i}\sigma_0) \;+\; \mathcal{M}_{\mu_0}(X_0,\sigma_0/2) \;\le\\ &\le\; \frac{C_0\lambda_0\lambda_1\sigma_0^{\delta/4}}{1-2^{-\delta/4}} \;+\; \mathcal{M}_{\mu_0}(X_0,\sigma_0/2).\end{aligned}$$

Dies impliziert

(9.132) $$\sup_{0<\sigma\le\sigma_0} \mathcal{M}_{\xi_1}(X_0,\sigma) \;\le\; C_1 < +\infty \quad \text{mit} \quad \xi_1 = \xi_0 + q\delta/4.$$

Durch successives Anwenden des obigen Argumentes bekommt man

(9.133) $$\sup_{0<\sigma\le\sigma_0} \mathcal{M}_{\xi}(X_0,\sigma) \;<\; +\infty.$$

für jedes $\xi \in (0, q+\delta/2+2)$. Hiermit bestätigt man schließlich

$$\liminf_{\sigma\to 0^+} \Phi(u,X_0,\sigma) = 0,$$

was bedeutet, daß X_0 zur Menge $Q'\setminus\Sigma$ gehört.

Wie man außerdem leicht nachprüft gilt:

$$\Sigma' \subset \Sigma'' \;:=\; \Big\{X_0 \in Q' \mid \limsup_{\sigma\to 0^+} \sigma^{-2-\frac{2\delta}{2-q}} \int_{t_0-\sigma}^{t_0+\sigma}\int_{B_\sigma} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t > 0\Big\}.$$

Dem Satz 2.2 des Kapitels IV in [Giaquinta (1983)] entnimmt man, daß

$$\mathcal{H}^{2+\frac{2\delta}{2-q}}(\Sigma'') \;=\; 0.$$

Da $\delta > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt hieraus die Aussage (9.61). ∎

Anhang A

Elliptische Systeme

Wir beginnen den Abschnitt mit einigen nützlichen multiplikativen Ungleichungen. Das folgende Lemma beweist man elementar unter Benutzung der Hölderschen Ungleichung

Lemma A.1 *Sei $E \in \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-meßbare Menge. Seien $1 \le p_0 < p_1 \le +\infty$. Sei $\theta \in (0,1)$. Wir definieren $p_\theta \in (p_0, p_1)$ vermöge*

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

Dann ist $L^{p_\theta}(E) \subset L^{p_0}(E) \cap L^{p_1}(E)$ und es gilt die Ungleichung:

$$\text{(a.1)} \qquad \|f\|_{L^{p_\theta}(E)} \le \|f\|_{L^{p_0}(E)}^{1-\theta} \|f\|_{L^{p_1}(E)}^{\theta} \quad \forall\, f \in L^{p_0}(E) \cap L^{p_1}(E). \qquad \blacksquare$$

Lemma A.2 *Sei $1 < p \le n$. Es existiert eine Konstante $c = c(n,p) > 0$, so daß für beliebiges $\varepsilon \in (0,1]$* gilt:

$$\text{(a.2)} \qquad \int_{B_r} u^2 \,\mathrm{d}x \le \frac{c\, r^{n(1-2/p)}}{\varepsilon^n} \left(\int_{B_r} |u|^p \,\mathrm{d}x \right)^{2/p} + \varepsilon r^2 \int_{B_r} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x \quad \forall\, u \in H^1(B_r).$$

Beweis. - 1) Zunächst betrachten wir den Fall $p = 1$ und $r = 1$: Mit Hilfe des Sobolevschen Einbettungssatzes findet man

$$\|u\|_{L^{2^*}(B_1)} \le c(n,p) \left(\|u\|_{L^2(B_1)} + \|\nabla u\|_{L^2(B_1)} \right) \quad \forall\, u \in H^1(B_1).$$ [1)]

[1)] Hier bezeichne 2^* den Sobolevschen Einbettungsexponenten $\frac{2n}{n-2}$, falls $n \ge 3$ und $q \in (2, +\infty)$ beliebig, falls $n = 2$.

Wendet man Lemma A.1 mit $p_0 = 2^*$, $p_1 = 1$ und einem $\theta \in (0,1)$, so daß

$$\frac{1}{2} = \frac{1-\theta}{2^*} + \frac{\theta}{1}$$

an und benutzt man den Sobolevschen Einbettungssatz sowie die Youngsche Ungleichung, so bekommt man für beliebiges $\varepsilon \in (0,1]$ und für alle $u \in H^1(B_1)$

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{L^2(B_1)} &\le \|u\|^{2(1-\theta)}_{L^{2^*}(B_1)} \|u\|^{2\theta}_{L^1(B_1)} \le \\ &\le c\Big(\|u\|^2_{L^2(B_1)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(B_1;\mathbb{R}^n)}\Big)^{1-\theta} \|u\|^{2\theta}_{L^1(B_1)} \le \\ &\le c\,\varepsilon^{-(1-\theta)/\theta} \|u\|^2_{L^1(B_1)} + \varepsilon \|\nabla u\|^2_{L^2(B_1;\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(B_1)}. \end{aligned}$$

Beachtet man $\theta = \dfrac{2}{n+2}$, falls $n \ge 3$ und $\theta \in \Big(0, \dfrac{1}{2}\Big)$ beliebig, falls $n = 2$, so ergibt sich aus der obigen Abschätzung für beliebiges $\varepsilon \in (0,1]$

$$\text{(a.3)} \qquad \int_{B_1} u^2 \,\mathrm{d}x \le c\,\varepsilon^{-n}\Big(\int_{B_1} |u| \,\mathrm{d}x\Big)^2 + \varepsilon \int_{B_1} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x \quad \forall\, u \in H^1(B_1)$$

($c = \text{const} > 0$ unabhängig von ε).

2) Beweis für beliebiges $r > 0$: Sei $u \in H^1(B_r(x_0))$. Wir definieren

$$\tilde{u}(y) := u(x_0 + ry) \qquad (y \in B_1).$$

Dann ist $\tilde{u} \in H^1(B_1)$. Unter Benutzung der Transformationsformel für das Lebesgue-Integral und der Ungleichung (a.3) schließt man

$$\begin{aligned} \int_{B_r} u^2 \,\mathrm{d}x &= r^n \int_{B_1} \tilde{u}^2 \,\mathrm{d}y \le \\ &\le c\,\varepsilon^{-n}\, r^n \Big(\int_{B_1} |\tilde{u}| \,\mathrm{d}y\Big)^2 + \varepsilon \int_{B_1} |\nabla \tilde{u}|^2 \,\mathrm{d}y = \\ &\le c\,\varepsilon^{-n}\, r^{-n} \Big(\int_{B_r} |u| \,\mathrm{d}x\Big)^2 + \varepsilon r^2 \int_{B_r} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun leicht aus der letzten Abschätzung unter Benutzung der Hölderschen Ungleichung. ∎

Lemma A.3 *Sei* $f : [a,b] \to [0,+\infty)$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ *eine beschränkte Funktion. Ferner existieren positive Konstanten* A, B, α *und* $0 < \varepsilon < 1$, *so daß für beliebige* $a \le \sigma < R \le b$ *gilt*:

(a.4) $\qquad f(\sigma) \,\leq\, A(R-\sigma)^{-\alpha} + B + \varepsilon f(R).$

Dann existiert eine positive Konstante $c = c(\alpha, \varepsilon)$ derart, daß für alle $a \leq \sigma < R \leq b$ gilt:

(a.5) $\qquad f(\sigma) \,\leq\, c\,(A(R-\sigma)^{-\alpha} + B).$

(*Es sei bemerkt, daß $c = c(\alpha, \varepsilon) = (1 - \varepsilon^{1/(\alpha+1)})^{-(\alpha+1)}$ die optimale Konstante für* (a.5) *ist*).

Beweis. – Seien $a \leq \sigma < R \leq b$ beliebig fixiert. Dann bezeichne (t_j) eine Folge monoton wachsender reeller Zahlen, definiert gemäß der rekursiven Vorschrift:

(i) $\qquad t_0 = \sigma,$

(ii) $\qquad t_{j+1} - t_j = (1-\tau)\tau^j(R-\sigma) \qquad (j = 0, 1, \ldots).$ [2)]

Zur Vereinfachung setzen wir $\Phi(t-s) = A(t-s)^{-\alpha} + B \quad (a \leq s < t \leq b)$. Dann erhalten wir nach iterativem Anwenden der Voraussetzung (a.4) auf die Folge (t_j)

$$\begin{aligned} f(\sigma) = f(t_0) \,&\leq\, \Phi(t_1 - t_0) + \varepsilon f(t_1) \leq \\ &\leq\, \Phi(t_1 - t_0) + \varepsilon\Phi(t_2 - t_1) + \varepsilon^2 f(t_2) \leq \cdots \\ &\cdots \leq \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon^j \Phi(t_{j+1} - t_j) + \varepsilon^k f(t_k). \end{aligned}$$

Wegen der Beschränktheit von f konvergiert die rechte Seite der obigen Ungleichung für $k \to +\infty$ gegen $\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \Phi(t_{j+1} - t_j)$, falls diese Summe endlich ist. Folglich bekommen wir

(a.6) $$f(\sigma) \,\leq\, \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j (A(1-\tau)^{-\alpha}\tau^{-j\alpha}(R-\sigma)^{-\alpha} + B).$$

Jetzt wählen wir $\tau \in (0,1)$, so daß

(a.7) $\qquad \varepsilon\tau^{-\alpha} < 1.$

Die Bedingung (a.7) garantiert, daß die Summe in (a.6) endlich ist, was die Behauptung (a.5) mit $c = c(\alpha, \varepsilon, \tau) = (1-\tau)^{-\alpha}(1 - \varepsilon\tau^{-\alpha})^{-1}$ zur Folge hat.

Berücksichtigt man außerdem die Tatsache, daß die Funktion $c(\alpha, \varepsilon, \cdot)$ ihr Minimum bei $\tau_0 = \varepsilon^{1/(\alpha+1)}$ annimmt, so folgt, daß die Konstante $c = c(\alpha, \varepsilon) = (1 - \varepsilon^{1/(\alpha+1)})^{-(\alpha+1)}$ für (a.5) die Beste ist. ■

[2)] Diese Definition impliziert sofort $t_j \to R$ für $j \to +\infty$.

Lemma A.4 *Für jedes* $0 < \sigma < 1$ *und für alle* $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ $(N \in \mathbb{N} \geq 1)$ *gilt*:

$$\text{(a.8)} \qquad (1+|\xi|+|\eta|)^{-\sigma} \leq \int_0^1 (1+|t\xi+(1-t)\eta|)^{-\sigma}\,\mathrm{d}t \leq \leq \frac{8}{1-\sigma}(1+|\xi|+|\eta|)^{-\sigma}.$$

Beweis. - 1°) Wegen $|t\xi+(1-t)\eta| \leq |\xi| + |\eta|$ für alle $t \in [0,1]$, ist die erste Ungleichung in (a.8) trivialerweise erfüllt.

2°) Um die zweite Ungleichung von (a.8) zu bekommen, nehmen wir zunächst an, daß $|\xi|$, $|\eta| \leq 1$. In diesem Fall schließen wir elementar,

$$\int_0^1 (1+|t\xi+(1-t)\eta|)^{-\sigma}\,\mathrm{d}t \leq 3^\sigma(1+|\xi|+|\eta|)^{-\sigma}.$$

3°) Als nächstes nehmen wir an, daß $|\eta| \geq 1$ und $|\xi| \leq |\eta|$ und setzen $\mu = |\xi|/|\eta|$. Dann finden wir die Abschätzung:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1+|t\xi+(1-t)\eta|)^{-\sigma}\,\mathrm{d}t &\leq 2^{\sigma/2}\int_0^1 (1+|1-t(\mu+1)||\eta|)^{-\sigma} = {}^{3)}\\ &= \frac{2^{\sigma/2}}{(1-\sigma)(\mu+1)|\eta|}\Big\{(1+|\eta|)^{1-\sigma}-1 + (1+|\xi|)^{1-\sigma}-1\Big\} \leq \\ &\leq \frac{2^{\sigma/2+1}}{(1-\sigma)(|\xi|+|\eta|)}(1+|\eta|+|\xi|)^{1-\sigma} \leq \\ &\leq \frac{8}{1-\sigma}(1+|\eta|+|\xi|)^{-\sigma}. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Lemma A.5 *Sei* $u \in W^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ $(1 \leq q < n)$. *Für* $x_0 \in \Omega$ *und* $0 < r < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ *definieren wir*

$$\Phi(u;x_0,R) := \left(\fint_{B_R(x_0)} |\nabla u - (\nabla u)_{B_R(x_0)}|^q\,\mathrm{d}x\right)^{1/q},$$

$$\mathcal{M}(u;x_0,R) := |u_{B_R(x_0)}|^{q^*/q} + \left(\fint_{B_R(x_0)} (1+|\nabla u|^q)\,\mathrm{d}x\right)^{1/q}.$$

---

3) Hierbei haben wir die elementare Abschätzung $|a+b| \geq \left|a - \frac{|b|}{|a|}a\right| = \left(1-\frac{|b|}{|a|}\right)|a|$ $(a, b \in \mathbb{R}^N; |a| \geq \max\{|b|, 1\})$ benutzt.

Dann haben wir für beliebige $x_0 \in \Omega$, $0 < R \le \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ die Abschätzungen:

$$\text{(a.9)} \qquad \left(\fint_{B_R} (1 + |u|^{q^*/q} + |\nabla u|)^q \,\mathrm{d}x \right)^{1/q} \le c\,\mathcal{M}(u; x_0, R),$$

$$\text{(a.10)} \qquad |\mathcal{M}(u; x_0, \tau R) - \mathcal{M}(u; x_0, R)| \le \lambda_0\, \Phi(u; x_0, R) \quad (0 < \tau < 1),$$

wobei $c = \mathrm{const}$ nur von n, q, u und $\lambda_0 = \mathrm{const}$ nur von n, q, u und τ abhängt.

Beweis. - 1°) Für den Beweis der Ungleichung (a.9) verwenden wir den Sobolevschen Einbettungssatz und eine äquivalente Normierung des Raumes $W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ (vgl. [Gilbarg and Trudinger (1977)]) und erhalten

$$\left(\fint_{B_R} |u|^{q^*} \,\mathrm{d}x \right)^{1/q} \le c \left\{ |u_{B_R}|^{q^*/q} + \left(\int_{B_R} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x \right)^{1/(n-q)} \left(\fint_{B_R} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x \right)^{1/q} \right\}.$$

Folglich gilt

$$\text{(a.11)} \qquad \left(\fint_{B_R} |u|^{q*} \,\mathrm{d}x \right)^{1/q} \le c\,\mathcal{M}(u; x_0, R),$$

was sofort die Behauptung (a.9) impliziert.

2°) Als nächstes sei $0 < \tau < 1$ beliebig fixiert. Den Beweis der zweiten Abschätzung führen in zwei separaten Schritten durch:

(i) Unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung und Anwendung der Hölderschen Ungleichung bestätigt man leicht

$$\begin{aligned}
\Big| |u_{B_{\tau R}}|^{q*/q} - |u_{B_R}|^{q*/q} \Big| &\le \frac{c}{\tau} \left(\fint_{B_R} |u|^{q*} \,\mathrm{d}x \right)^{1/n} |u_{B_{\tau R}} - u_{B_R}| \le \\
&\le \frac{c}{\tau} \left(\fint_{B_R} |u|^{q*} \,\mathrm{d}x \right)^{1/n} \times \\
&\qquad \times \left(\fint_{B_{\tau R}} \fint_{B_R} |u(x) - (\nabla u)_{B_R} \cdot x - u(y) + (\nabla u)_{B_R} \cdot y|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right)^{1/q} \le \\
&\le \frac{c}{R} \left(\fint_{B_R} |u(x) - u_{B_R} - (\nabla u)_{B_R} \cdot x|^q \,\mathrm{d}x \right)^{1/q},
\end{aligned}$$

und zusammen mit der Poincaré-Ungleichung folgt

$$\left| |u_{B_{\tau R}}|^{q*/q} - |u_{B_R}|^{q*/q} \right| \le c\,\Phi(u;x_0,R), \tag{a.12}$$

wobei $c = \text{const}$ nur von n, q, τ und u, aber nicht von R abhängt.
(ii) Als nächstes definieren wir für fast alle $\{x, y\} \in B_{\tau R} \times B_R$

$$\begin{aligned} G(x,y) &:= 1 + |\nabla u(x)| \\ F(x,y) &:= 1 + |\nabla u(y)|. \end{aligned}$$

Unter Verwendung des Satzes von Fubini verifiziert man $G, F \in L^q(B_{\tau R} \times B_R)$. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhält man

$$\begin{aligned} &\left| \left(\fint_{B_{\tau R}} (1+|\nabla u|)^q \,\mathrm{d}x \right)^{1/q} - \left(\fint_{B_R} (1+|\nabla u|)^q \,\mathrm{d}y \right)^{1/q} \right| \le \\ &\le \frac{\|F - G\|_{L^q(B_{\tau R}\times B_R)}}{\tau^{n/q}\,\mathrm{mes}(B_R)^{2/q}} \le \\ &\le \frac{c}{\tau^{2n/q}} \left(\fint_{B_R} \fint_{B_R} |\nabla u(x) - \nabla u(y)|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right)^{1/q} \le \\ &\le c\,\Phi(u;x_0,R). \end{aligned} \tag{a.13}$$

Die Abschätzung (a.10) folgt nun leicht nach Kombination von (a.12) und (a.13). ■

Als nächstes beweisen wir zwei technische Lemmas, die ein nützliches Hilfsmittel zur Herstellung sogenannter Morrey-Raum-Abschätzungen sind (vgl. auch [Campanato (1965)]).

Lemma A.6 *Sei $\phi : (0,1] \to (0,+\infty)$ eine nichtfallende Funktion. Ferner mögen positive Konstanten $A > 1, B, \alpha, \beta\,(0 < \alpha < \beta)$ existieren, so daß für alle $0 < t < \tau \le 1/2$ gilt:*

$$\phi(t) \le A\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\beta} \phi(\tau) + \tau^{\alpha} B. \tag{a.14}$$

Dann gibt es eine Konstante $K_* > 0$, so daß die folgende Ungleichung für beliebige $0 < t \le 1/2$ gilt:

$$\phi(t) \le K_*(t^{\alpha}\phi(1/2) + B). \tag{a.15}$$

Beweis. - Zunächst, definieren wir $\chi := (2A)^{\frac{1}{\beta-\alpha}} > 1$. Nun seien $0 < t < \tau \le 1/2$ beliebig fixiert. Dann gibt es genau ein $m \in \mathbb{N}\,(m \ge 0)$ mit,

$$\chi^m < \frac{\tau}{t} \le \chi^{m+1}. \tag{a.16}$$

Beachtet man $A/\chi^{\beta-\alpha} = 1/2$, so erhält man aus (a.14), indem man dort t durch τ/χ^m und τ durch τ/χ^{m+1} ersetzt, die Abschätzung

$$\begin{aligned}\phi(t) \le \phi(\tau/\chi^m) &\le A\chi^{-\beta}\phi(\tau/\chi^{m-1}) + \tau^\alpha\chi^{-\alpha(m-1)}B \le \\ &\le A^2\chi^{-2\beta}\phi(\tau/\chi^{m-2}) + \tau^\alpha B\chi^{-\alpha(m-1)}(1 + A\chi^{\alpha-\beta}) \le \cdots \le \\ &\le A^m\chi^{-m\beta}\phi(\tau) + \tau^\alpha B\chi^{-\alpha(m-1)}\sum_{j=1}^{m-1}\left(\frac{A}{\chi^{\beta-\alpha}}\right)^j \le \\ &\le \left(\frac{1}{\chi^{m+1}}\right)^\alpha\left\{2^{-m}\chi^\alpha\phi(\tau) + \tau^\alpha B\chi^{2\alpha}\right\}.\end{aligned}$$

Aufgrund von (a.16) schließt man aus der obigen Abschätzung

$$\phi(t) \le 2^{\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}}A^{\frac{2\alpha}{\beta-\alpha}}\left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha(\phi(1/2) + \tau^\alpha B). \tag{a.17}$$

Die Behauptung (a.15) folgt nun sofort aus (a.17) nach Ausführung des Grenzüberganges $\tau \to \frac{1}{2}$. ■

Lemma A.7 *Es sei $f : (0,1] \to (0,+\infty)$ eine nichtfallende Funktion. Außerdem seien positive Konstanten $A, B, \mu, \lambda\,(0 < \mu < \lambda)$ und eine Funktion $\omega : (0,1) \to (0,+\infty)$ gegeben, derart daß für beliebige $0 < \sigma \le \sigma_0$ und $0 < t < 1$ gilt:*

$$f(t\sigma) \le At^\lambda f(\sigma) + \sigma^\mu\omega(t)B. \tag{a.18}$$

Dann, haben wir die Abschätzung:

$$f(\sigma) \le A^{\frac{4\mu}{\lambda-\mu}}\sigma^\mu\left(\frac{f(\sigma_0)}{\sigma_0^\mu} + \frac{A}{A-1}\omega(t_A)B\right) \quad \forall 0 < \sigma \le \sigma_0, \tag{a.19}$$

wobei

$$t_A := \left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{2}{\lambda-\mu}}.$$

Beweis. - Sei $0 < \sigma_0 < 1$ beliebig fixiert. Sei $t \in (0,1)$ so gewählt, daß

$$At^{\frac{\lambda-\mu}{2}} = 1. \tag{a.20}$$

Dann folgert man aus (a.18), daß für alle $0 < \sigma \le \sigma_0$ gilt:

$$\text{(a.21)} \qquad f(t\sigma) \le t^{\frac{\lambda+\mu}{2}} f(\sigma) + \sigma^\mu B' \qquad (B' = \omega(t)B).$$

Indem man in (a.21) σ durch $t^{k-1}\sigma_0\,(k \in \mathbb{N} \ge 1)$ ersetzt und die Ungleichung (a.21) iterativ anwendet, bekommt man

$$\begin{aligned} f(t^k\sigma_0) &\le t^{\frac{\lambda+\mu}{2}} f(t^{k-1}\sigma_0) + t^{(k-1)\mu}B' \le \ldots \le \\ &\le t^{\frac{k(\lambda+\mu)}{2}} f(\sigma_0) + \sum_{j=1}^{k-1} t^{\frac{j(\lambda+\mu)}{2}} t^{(k-j-1)\mu}\sigma_0^\mu B' \le \\ &\le t^{\frac{k(\lambda+\mu)}{2}} f(\sigma_0) + t^{(k-1)\mu}\sigma_0^\mu B' \sum_{j=1}^{k-1} t^{\frac{j(\lambda-\mu)}{2}} \le \\ &\le t^{k\mu}\left(f(\sigma_0) + \frac{\sigma_0^\mu B'}{t^\mu(1-t^{(\lambda-\mu)/2})}\right) \le \\ &\le A^{\frac{4\mu}{\lambda-\mu}} (t^{k+1}\sigma_0)^\mu \left(\frac{f(\sigma_0)}{\sigma_0^\mu} + \frac{B'}{1-t^{(\lambda-\mu)/2}}\right). \end{aligned}$$

Sei nun $0 < \sigma \le \sigma_0$ beliebig gewählt. Dann gibt es genau eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}\,(k \ge 0)$ derart, daß

$$t^{k+1}\sigma_0 < \sigma \le t^k\sigma_0.$$

Aus der obigen Abschätzung folgt hiermit

$$\begin{aligned} f(\sigma) &\le A^{\frac{4\mu}{\lambda-\mu}}\sigma^\mu \left(\frac{f(\sigma_0)}{\sigma_0^\mu} + \frac{B'}{1-t^{(\lambda-\mu)/2}}\right) \le \\ &\le A^{\frac{4\mu}{\lambda-\mu}}\sigma^\mu \left(\frac{f(\sigma_0)}{\sigma_0^\mu} + \frac{AB'}{A-1}\right). \end{aligned}$$

Dies liefert die behauptete Ungleichung (a.19). ■

Lemma A.8 *Seien* (ϕ_m), $(\mathcal{M}_m)$ *und* (s_m) *Folgen nichtnegativer reeller Zahlen. Ferner sei* (s_m) *nichtwachsend, so daß* $\mathcal{S} := \sum_{m=0}^{\infty} s_m < +\infty$. *Außerdem mögen positive Konstanten* $\varepsilon_1, \tau, \lambda_0, M$ *existieren, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(E1) *Für alle* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *mit* $\phi_m \le \varepsilon_1$ *und* $\mathcal{M}_m \le M$ gilt:

$$\phi_{m+1} \le \sqrt{\tau}(\phi_m + s_m).$$

(E2) $\quad |\mathcal{M}_{m+1} - \mathcal{M}_m| \leq \lambda_0 \phi_m \quad \forall\, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$

(E3) $\quad \phi_0 + \dfrac{s_0}{1-\sqrt{\tau}} \leq \varepsilon_1.$

(E4) $\quad \mathcal{M}_0 \leq \dfrac{M}{2}.$

(E5) $\quad \dfrac{\lambda_0}{1-\sqrt{\tau}}(\phi_0 + \mathcal{S}) \leq \dfrac{M}{2}.$

Dann haben wir für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\text{(a.22)} \qquad \phi_m \leq \tau^{m/2}\phi_0 + \sum_{k=0}^{m-1} \tau^{(m-k)/2} s_k, \quad \mathcal{M}_m \leq M.$$

Beweis. - Für den Beweis von (a.22) verwenden wir vollständige Induktion nach $m \in \mathbb{N}$.
(i) Für $m = 1$ folgt die erste Ungleichung in (a.22) wegen (E3) und (E4) unmittelbar aus der Bedingung (E1). Für den Nachweis der zweiten Ungleichung machen wir Gebrauch von der Dreiecksungleichung und benutzen die Voraussetzungen (E2), (E4) und (E5). Wir bekommen also

$$\mathcal{M}_1 \leq |\mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_0| + \mathcal{M}_0 \leq \lambda_0\phi_0 + \frac{M}{2} \leq M.$$

(ii) Der Induktionsschritt $m \to m+1$: Nun nehmen wir an, daß (a.22) für $j = 1, \ldots, m$ erfüllt ist. Da die Folge (s_m) nichtwachsend ist, ergibt sich aus (a.22) zusammen mit (E3)

$$\phi_m \leq \phi_0 + \frac{s_0}{1-\sqrt{\tau}} \leq \varepsilon_1.$$

Da außerdem gemäß der Induktionsvoraussetzung $\mathcal{M}_m \leq M$ erfüllt ist, können wir die Eigenschaft (E1) anwenden und erhalten somit

$$\phi_{m+1} \leq \sqrt{\tau}(\phi_m + s_m) \leq \tau^{(m+1)/2}\phi_0 + \sum_{k=0}^{m} \tau^{(m+1-k)/2} s_k.$$

Darüber hinaus findet man unter Benutzung der Dreiecksungleichung zusammen mit (E2) und (E4),

$$\mathcal{M}_{m+1} \leq \sum_{j=0}^{m} |\mathcal{M}_{j+1} - \mathcal{M}_j| + \mathcal{M}_0 \leq \lambda_0 \sum_{j=0}^{m} \phi_j + \frac{M}{2}.$$

Aus dieser Ungleichung folgt schließlich zusammen mit (a.22) für $j = 1, \ldots, m$ unter Berücksichtigung der Bedingung (E5) die Abschätzung

$$\mathcal{M}_{m+1} \leq \frac{\lambda_0}{1-\sqrt{\tau}}\phi_0 + \lambda_0 \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{j-1} \tau^{(j-k)/2} s_k + \frac{M}{2} \leq$$
$$\leq \frac{\lambda_0}{1-\sqrt{\tau}}(\phi_0 + \mathcal{S}) + \frac{M}{2} \leq M.$$

Also gilt (a.22) für $m+1$. ■

Im nächsten Lemma notieren wir einige nützliche Eigenschaften für Funktionen ω, welche einer sogenannten Dini-Bedingung genügen.

Lemma A.9 *Sei $\omega : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ eine nichtfallende Funktion, so daß*

$$\text{(a.23)} \qquad \int_0^1 \frac{\omega(t)}{t}\, \mathrm{d}t < +\infty.$$

(i) *Für jedes $\theta > 0$ haben wir*:

$$\text{(a.24)} \qquad \int_0^1 \frac{\omega(t^\theta)}{t}\, \mathrm{d}t < +\infty.$$

(ii) *Für alle $R, \tau \in (0,1)$ gilt die folgende Ungleichung*:

$$\text{(a.25)} \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \omega(\tau^m R) \leq \frac{1}{1-\tau} \int_0^R \frac{\omega(t)}{t}\, \mathrm{d}t + \omega(R).$$

(iii) *Es gibt eine nichtwachsende Funktion $\gamma : (0,1] \to (0,+\infty)$ mit $\lim\limits_{t\to 0^+} \gamma(t) = +\infty$, so daß*

$$\text{(a.26)} \qquad \begin{cases} t \mapsto \gamma(t)\omega(t) \quad \textit{ist nichtfallend auf } (0,1] \textit{ und} \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{\gamma(t)\omega(t)}{t}\, \mathrm{d}t < +\infty. \end{cases}$$

Beweis. - (i) Die Behauptung (a.24) folgert man leicht aus (a.23) mit Hilfe der Transformationsformel für das Lebesgue-Integral.

(ii) Seien $R, \tau \in (0,1)$ beliebig fixiert. Da nach Voraussetzung ω eine nichtfallende Funktion ist, bekommt man die folgende Abschätzung

$$\int_0^R \frac{\omega(t)}{t}\, \mathrm{d}t = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\tau^m R}^{\tau^{m-1}R} \frac{\omega(t)}{t}\, \mathrm{d}t \geq$$
$$\geq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau^{m-1} - \tau^m}{\tau^{m-1}} \omega(\tau^m R) = (1-\tau) \sum_{m=1}^{\infty} \omega(\tau^m R).$$

Dies liefert (a.25).

(iii) Zunächst betrachten wir den Fall $\omega(t_0) = 0$ für ein $t_0 \in (0,1]$. Dies impliziert $\omega(t) = 0$ für jedes $t \in [0, t_0]$. Dann erfüllt die Funktion

$$\gamma(t) := \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad t \in (t_0, 1] \\ \dfrac{t_0}{t} & \text{falls} \quad t \in (0, 1] \end{cases}$$

die gewünschte Eigenschaft.

Nun nehmen wir an, daß $\omega(t) > 0$ für alle $t \in (0,1]$. In diesem Fall setzen wir

$$I := \int_0^1 \frac{\omega(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Dann gibt es eine absteigende Folge von Zahlen $1 = t_0 > t_1 > \ldots > t_m > 0\,(m \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ mit $\lim\limits_{m\to\infty} t_m = 0$, so daß

$$\text{(a.27)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{t_m} \frac{\omega(t)}{t}\,\mathrm{d}t \le 4^{-m} I, \\ \omega(t_{m+1}) \le \dfrac{1}{2}\omega(t_m) \quad \forall\, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Wir setzen

$$\gamma(t) := 2^m \min\left\{2, \frac{\omega(t_m)}{\omega(t)}\right\} \quad \forall\, t \in (t_{m+1}, t_m] \quad (m \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

Wie man sich leicht klarmacht, ist $\gamma : (0,1] \to (0, +\infty)$ nichtwachsend und es gilt $\gamma(t_m) = 2^m$ für alle $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Außerdem ist ersichtlich, daß $\gamma(t)\,\omega(t)$ eine auf jedem der Intervalle $(t_{m+1}, t_m]$ nichtfallende Funktion ist. Andererseits ergibt sich aus (a.27)

$$\gamma(t_{m+1})\omega(t_{m+1}) = 2^{m+1}\omega(t_{m+1}) \le \gamma(t_m)\omega(t_m) \quad \forall\, m \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

was bedeutet, daß die Funktion $\gamma(t)\omega(t)$ auf $(0,1]$ nichtfallend ist. Mit Hilfe von (a.27) findet man schließlich

$$\int_0^1 \frac{\gamma(t)\omega(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{t_{m+1}}^{t_m} \frac{\gamma(t)\omega(t)}{t}\,\mathrm{d}t \le$$
$$\le I \sum_{m=0}^{\infty} 2^{m+1} 4^{-m} = 2I \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} = 4I,$$

was den Beweis des Lemmas abschließt. ■

Lemma A.10 *Sei $\omega : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ eine beschränkte Funktion. Dann existiert eine positive Konstante $c_* = c_*(n)$, so daß für jedes $u \in W^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ die folgende Abschätzung für jede beliebige Kugel $B_R \subset \Omega\,(0 < R \leq 1)$ und für alle $p \geq 1$ gültig ist:*

$$\left(\fint_{B_R} [\omega(R + |u(x) - u_{B_R}|)]^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \leq \tag{a.28}$$

$$\leq \omega(2\sqrt{R}) + k_0 R^{q/2p}\left(c_* \fint_{B_R} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

wobei $k_0 = \sup\limits_{t \geq 0} \omega(t)$.

Beweis. - Sei $B_R \subset \Omega\,(0 < R \leq 1)$ beliebig, aber fixiert. Wir definieren

$$\mathcal{A} := \left\{ x \in B_R \,\middle|\, |u(x) - u_{B_R}| \leq \sqrt{R} \right\}$$

und erhalten die Abschätzung

$$\left(\fint_{B_R} [\omega(R + |u(x) - u_{B_R}|)]^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \leq \tag{a.29}$$

$$\leq \omega(2\sqrt{R}) \;+\; k_0 \left(\frac{\mathrm{mes}(B_R \setminus \mathcal{A})}{\mathrm{mes}(B_R)}\right)^{1/p}.$$

Mit Hilfe der Poincaré-Ungleichung folgt

$$\frac{\mathrm{mes}(B_R \setminus \mathcal{A})}{\mathrm{mes}(B_R)} \;\leq\; R^{-q/2} \fint_{B_R} |u - u_{B_R}|^q \,\mathrm{d}x \;\leq\; c_* R^{q/2} \fint_{B_R} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x.$$

Somit ergibt sich die Behauptung (a.28) nach Einsetzen der soeben erhaltenen Ungleichung in (a.29). ■

Definition A.1 *Sei $1 \leq p < +\infty$. Sei $\omega : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ nichtfallend. Mit $\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(\Omega)$ bezeichnen wir die Menge aller $u \in L^p(\Omega)$ mit*

$$[u]^p_{\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(\Omega)} := \sup_{\substack{0 < r \leq \mathrm{diam}(\Omega) \\ x_0 \in \Omega}} \left\{ \frac{1}{r^n(\omega(r))^p} \int_{B_r(x_0)\cap\Omega} |u - u_{B_r(x_0)\cap\Omega}|^p \,\mathrm{d}x \right\} < +\infty. \qquad ■$$

Satz A.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine reguläre offene und beschränkte Menge. Sei $p \in [1,+\infty)$ und sei $\omega : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ nichtfallend mit*

$$\text{(a.30)} \qquad \int_0^1 \frac{\omega(r)}{r}\,\mathrm{d}r < +\infty.$$

Dann ist $\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(Q)$ *stetig in* $C(\overline{Q})$ *eingebettet.*

Bevor wir mit dem Beweis des Satzes beginnen, notieren wir ein vorbereitendes Lemma, welches wir auch an einer anderen Stelle benötigen werden.

Lemma A.11 *Sei* $u \in L^p(\Omega)\,(1 \le p < +\infty)$. *Sei* $E \subset \Omega$ *eine Lebesgue-meßbare Menge, mit* $|E| > 0$. *Seien* $E', E'' \subset E$ *Lebesgue-meßbar mit* $|E'| > 0, |E''| > 0$ [4]. *Dann gilt*:

$$\Big| u_{E'} - u_{E''} \Big| \le 2\bigg(\frac{|E|}{|E'||E''|} \int_E |u - u_E|^p \,\mathrm{d}x \bigg)^{1/p}.$$

Beweis. - Unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung und der Dreiecksungleichung erhält man

$$\begin{aligned}
\Big| u_{E'} - u_{E''} \Big| &= \bigg| \fint_{E'} u(x)\,\mathrm{d}x - \fint_{E''} u(y)\,\mathrm{d}y \bigg| \le \fint_{E'}\fint_{E''} |u(x) - u(y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le \\
&\le \bigg(\frac{1}{|E'||E''|} \int_E \int_E |u(x) - u(y)|^p \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \bigg)^{1/p} \le \\
&\le 2\bigg(\frac{|E|}{|E'||E''|} \int_E |u(x) - u_E|^p \,\mathrm{d}x \bigg)^{1/p}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Beweis von Satz A.1 - Sei $u \in \mathfrak{L}^p_{(\omega)}(Q)$. Sei $x_0 \in \Omega$ und seien $0 < \rho_1 < \rho_2 \le R_0 := \mathrm{diam}(\Omega)/2$. Beachtet man die Regularität der Menge Ω, so erhält man mit Hilfe von Lemma A.11

$$\begin{aligned}
&\Big| u_{B_{\rho_1}(x_0)\cap\Omega} - u_{B_{\rho_2}(x_0)\cap\Omega} \Big| \le \\
\text{(a.31)} \qquad &\le \bigg(\frac{2^p}{\mathrm{mes}(B_{\rho_1}(x_0) \cap \Omega)} \int_{B_{\rho_2}(x_0)\cap\Omega} |u - u_{B_{\rho_2}(x_0)\cap\Omega}|^p \,\mathrm{d}x \bigg)^{1/p} \le \\
&\le c\,\omega(\rho_2) \Big(\frac{\rho_2}{\rho_1}\Big)^{n/p} \bigg(\frac{1}{\rho_2^n (\omega(\rho_2))^p} \int_{B_{\rho_2}(x_0)\cap\Omega} |u - u_{B_{\rho_2}(x_0)\cap\Omega}|^p \,\mathrm{d}x \bigg)^{1/p} \le \\
&\le c_1\, [u]_{\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(\Omega)} \omega(\rho_2) \Big(\frac{\rho_2}{\rho_1}\Big)^{n/p}
\end{aligned}$$

[4] Hierbei bezeichne $|E|$ das Lebesgue-Maß einer Lebesgue-meßbaren Menge $E \subset \mathbb{R}^n$.

($c_1 = \text{const}$). Hieraus schließt man für beliebiges $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\left| u_{B_{2^{-j}R_0}(x_0)\cap\Omega} - u_{B_{2^{-(j+1)}R_0}(x_0)\cap\Omega} \right| \le 2^{n/p} c_1 \, [u]_{\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(\Omega)} \omega(2^{-j}R_0). \tag{a.32}$$

Unter Benutzung der Dreiecksungleichung und (a.25) bekommt man für beliebige $m, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $(l < m)$:

$$\begin{aligned}
&\left| u_{B_{2^{-l}R_0}(x_0)\cap\Omega} - u_{B_{2^{-m}R_0}(x_0)\cap\Omega} \right| \le \\
&\quad \le \sum_{j=l}^{m-1} \left| u_{B_{2^{-j}R_0}(x_0)\cap\Omega} - u_{B_{2^{-(j+1)}R_0}(x_0)\cap\Omega} \right| \le \\
&\quad \le 2^{n/p} c_1 \, [u]_{\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(\Omega)} \sum_{j=l}^{m-1} \omega(2^{-j}R_0) \le \\
&\quad \le 2^{n/p} c_1 \, [u]_{\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(\Omega)} \left(2 \int_0^{2^{-l}R_0} \frac{\omega(r)}{r} \, \mathrm{d}r + \omega(2^{-l}R_0) \right).
\end{aligned}$$

Dies zeigt, daß $(u_{B_{2^{-m}R}(x_0)\cap\Omega})$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist. Wir setzen

$$\tilde{u}(x_0) := \lim_{m\to\infty} u_{B_{2^{-m}R_0}(x_0)\cap\Omega}.$$

Die obige Abschätzung liefert nun nach Ausführung des Grenzüberganges $m \to +\infty$

$$\left| u_{B_{2^{-l}R_0}(x_0)\cap\Omega} - \tilde{u}(x_0) \right| \le 2^{n/p} c_1 \, [u]_{\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(\Omega)} \left(2 \int_0^{2^{-l}R_0} \frac{\omega(r)}{r} \, \mathrm{d}r + \omega(2^{-l}R_0) \right). \tag{a.33}$$

Sei $0 < R \le R_0$ beliebig gewählt. Dann existiert ein $l \in \mathbb{N}$, so daß

$$2^{-l}R_0 < R \le 2^{-l+1}R_0.$$

Benutzt man die Dreiecksungleichung und wendet man anschließend die Abschätzung (a.33) sowie die Abschätzung (a.31) mit $\rho_1 = 2^{-l}R_0$ und $\rho_2 := R$ an, so folgt

$$\begin{aligned}
\left| \tilde{u}(x_0) - u_{B_R(x_0)\cap\Omega} \right| &\le \left| \tilde{u}(x_0) - u_{B_{2^{-l}R_0}(x_0)\cap\Omega} \right| + \left| u_{B_{2^{-l}R_0}(x_0)\cap\Omega} - u_{B_R(x_0)\cap\Omega} \right| \le \\
&\le 2^{n/p} c_1 \, [u]_{\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(\Omega)} \left(2 \int_0^{2^{-l}R_0} \frac{\omega(r)}{r} \, \mathrm{d}r + \omega(2^{-l}R_0) \right) + \\
&\qquad + 2^{n/p} c_1 \, [u]_{\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(\Omega)} \omega(R) \\
&\le 2^{n/p+1} c_1 \, [u]_{\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(\Omega)} \left(\int_0^R \frac{\omega(r)}{r} \, \mathrm{d}r + \omega(R) \right).
\end{aligned} \tag{a.34}$$

Seien $x_1, x_2 \in \Omega$ mit $R := |x_1 - x_2| \le R_0$. Unter Benutzung von Lemma A.11 erhält man:

$$\begin{aligned}
&\Big|u_{B_R(x_1)\cap\Omega} - u_{B_R(x_2)\cap\Omega}\Big| \le \\
&\le 2\left(\frac{|B_{2R}(x_1)\cap\Omega|}{|B_R(x_1)\cap\Omega||B_R(x_2)\cap\Omega|}\int_{B_{2R}(x_1)\cap\Omega}|u - u_{B_{2R}(x_1)\cap\Omega}|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \le \\
&\le c\,\omega(2R)\left(\frac{1}{R^n(\omega(2R))^p}\int_{B_{2R}(x_1)\cap\Omega}|u - u_{B_{2R}(x_1)\cap\Omega}|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \le \\
&\le c\,\omega(2R)[u]_{\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Als nächstes wenden wir die Dreiecksungleichung an und kombinieren die letzte Abschätzung mit (a.34), wobei dort x_0 durch x_1 (bzw. x_0 durch x_2) ersetzt wird, und erhalten

$$\begin{aligned}
&|\tilde{u}(x_1) - \tilde{u}(x_2)| \le \\
&\le \Big|\tilde{u}(x_1) - u_{B_R(x_1)\cap\Omega}\Big| + \Big|u_{B_R(x_1)\cap\Omega} - u_{B_R(x_2)\cap\Omega}\Big| + \Big|u_{B_R(x_2)\cap\Omega} - \tilde{u}(x_2)\Big| \le \\
&\le c\,[u]_{\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(\Omega)}\left(\int_0^R \frac{\omega(r)}{r}\,\mathrm{d}r + \omega(2R)\right).
\end{aligned}$$

Da die rechte Seite dieser Ungleichung für $R \to 0$ gegen 0 konvergiert, erkennt man, daß $\tilde{u}$ auf Ω gleichmäßig stetig und beschränkt ist. Bekanntlich ist fast jeder Punkt von $x \in \Omega$ ein Lebesgue-Punkt von u (siehe z.B. in [Stein (1970)]). Dies liefert $\tilde{u}(x) = u(x)$ für fast alle $x \in \Omega$.

Die Stetigkeit der Einbettung folgt unmittelbar aus der Abschätzung

$$\begin{aligned}
|\tilde{u}(x)| &\le |\tilde{u}(x) - u_{B_{R_0}\cap\Omega}| + |u_{B_{R_0}\cap\Omega}| \le \\
&\le 2^{n/p}c_1\,[u]_{\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(\Omega)}\left(2\int_0^{R_0}\frac{\omega(r)}{r}\,\mathrm{d}r + \omega(R_0)\right) + \\
&\qquad\qquad + |B_{R_0}\cap\Omega|^{-1/p}\left(\int_\Omega |u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \le \\
&\le c\left([u]_{\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}\right) \le c\,\|u\|_{\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(\Omega)}
\end{aligned}$$

für alle $x \in \Omega$. ■

Anhang B

Parabolische Systeme

Hier machen wir einige ergänzenden Ausführungen zu den Beweisen im Teil II. Wir beginnen diesen Abschnitt mit einigen nützlichen Identifikationen von Lebesgue-meßbaren Funktionen $u : Q \to \mathbb{R}$ mit Bochner-meßbaren Funktionen $v(t)$ $(t \in (a,b))$ mit Werten in einen entsprechenden Banach-Raum X.

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und seien $-\infty < a < b < +\infty$. Wir setzen $Q := \Omega \times (a,b)$. Dann bezeichne $L^{p,q}(Q)$ $(1 \le p < +\infty, 1 \le q \le +\infty)$ den Raum aller Lebesgue-meßbaren Funktionen $v : Q \to \mathbb{R}$:

$$\|v\|_{L^{p,q}(Q)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_a^b \left(\int_\Omega |v(x,t)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{q/p} \mathrm{d}t \right)^{1/q} < +\infty & \text{falls} \quad q < +\infty \\ \operatorname*{ess\,sup}_{t \in (a,b)} \left(\displaystyle\int_\Omega |v(\cdot,t)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} < +\infty & \text{falls} \quad q = +\infty. \end{cases}$$

Unter Verwendung des Satzes von Fubini zeigt man, daß

$$L^{p,p}(Q) \cong L^p(Q) \quad \text{für alle} \;\; 1 \le p < +\infty.$$

Satz B.1 ($L^{p,q}(Q) \cong L^q(a,b; L^p(\Omega))$) *Sei $1 \le p < +\infty$ und sei $1 \le q \le +\infty$. Es existiert genau eine Isometrie*

$$\phi_{p,q} : L^{p,q}(Q) \to L^q(a,b; L^p(\Omega)),$$

so daß für alle $v \in C(\overline{Q})$ gilt:

$$\phi_{p,q}(v)(t)(x) \; = \; v(x,t) \quad \forall\, x \in \Omega, \; \forall\, t \in (a,b).$$

Beweis. - 1. *Der Fall* $1 \le q < +\infty$: Für $v \in C(\overline{Q})$ definieren wir

$$\phi_{p,q}(v)(t)(x) := v(x,t) \quad (x \in \Omega, t \in (a,b)).$$

Unmittelbar aus der Definition folgt

$$\begin{aligned}\|\phi_{p,q}(v)\|^q_{L^q(a,b;L^p(\Omega))} &= \int_a^b \|\phi_{p,q}(v)(t)\|^q_{L^p(\Omega)}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_a^b \left(\int_\Omega |v(x,t)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{q/p} \mathrm{d}t = \|v\|^q_{L^{p,q}(Q)}.\end{aligned}$$

Da $C(\overline{Q})$ eine dichte Teilmenge von $L^{p,q}(Q)$ ist, kann man $\phi_{p,q}$ eindeutig zu einer Isometrie auf $L^{p,q}(Q)$ fortsetzen. Die Surjektivität dieser Abbildung ist aufgrund der Dichtheit der Menge $\phi_{p,q}(C(\overline{Q}))$ in $L^q(a,b;L^p(\Omega))$ gewährleistet.

2. *Der Fall* $q = +\infty$: Sei $v \in L^{p,\infty}(Q)$. Unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung zeigt man

$$v \in L^{p,r}(Q) \quad \text{für alle} \quad r \geq 1.$$

Nun sei $r \geq 1$ beliebig gewählt. Da $C(\overline{Q})$ eine dichte Teilmenge $L^{p,r}(Q)$ ist, existiert eine Folge in $(v_m) \subset C(\overline{Q})$, die in $L^{p,r}(Q)$ gegen v konvergiert. Insbesondere konvergiert (v_m) in $L^{1,1}(Q)$ gegen v. Hiermit bekommt man

$$\text{(b.1)} \quad \phi_{1,1}(v) = \lim_{m\to\infty} \phi_{1,1}(v_m) = \lim_{m\to\infty} \phi_{p,r}(v_m) = \phi_{p,r}(v_m).$$

Beachtet man außerdem, daß $\phi_{p,r}$ eine Isometrie ist, so folgt zusammen mit (b.1)

$$\begin{aligned}\|\phi_{1,1}(v)\|_{L^r(a,b;L^p(\Omega))} &= \|\phi_{p,r}(v)\|_{L^r(a,b;L^p(\Omega))} = \\ &= \|v\|_{L^{p,r}(Q)} \leq (b-a)^{1/r}\|v\|_{L^{p,\infty}(Q)}.\end{aligned}$$

Dies impliziert $\phi_{1,1}(v) \in L^\infty(a,b;L^p(\Omega))$ und

$$\|\phi_{1,1}(v)\|_{L^\infty(a,b;L^p(\Omega))} \leq \|v\|_{L^{p,\infty}(Q)}.$$

Zusätzlich zeigt man

$$\begin{aligned}\|\phi_{1,1}(v)\|_{L^\infty(a,b;L^p(\Omega))} &= \lim_{r\to\infty} \|\phi_{p,r}(v)\|_{L^r(a,b;L^p(\Omega))} = \\ &= \lim_{r\to\infty} \|v\|_{L^{p,r}(Q)} = \|v\|_{L^{p,\infty}(Q)}.\end{aligned}$$

Somit ist $\phi_{p,\infty} := \phi_{1,1}\big|_{L^{p,\infty}(Q)}$ eine Isometrie.

Surjektivität von $\phi_{p,\infty}$: Sei $u \in L^\infty(a,b;L^p(\Omega))$. Wir setzen $v := \phi_{1,1}^{-1}(u)$. Sei $r \geq 1$ beliebig. Wie oben zeigt man unter Verwendung von

$$\text{(b.2)} \qquad \phi_{1,1}^{-1}(u)(x,t) \;=\; \phi_{p,r}^{-1}(u)(x,t) \quad \text{ffa.}\{x,t\} \in Q$$

die Gültigkeit der folgenden Ungleichung:

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^{p,r}(Q)} \;&=\; \|\phi_{p,r}^{-1}(u)\|_{L^{p,r}(Q)} \;= \\ &=\; \|u\|_{L^r(a,b;L^p(\Omega))} \;\leq\; (b-a)^{1/r}\|u\|_{L^\infty(a,b;L^p(\Omega))}. \end{aligned}$$

Somit ist $v \in L^{p,\infty}(Q)$. Offensichtlich gilt $\phi_{p,\infty}(v) \;=\; \phi_{1,1}(v) = u$. ■

Satz B.2 ($W_q^{1,0}(Q) \cong L^q(a,b;W_q^1(\Omega))$) *Sei* $1 \leq q < +\infty$. *Es existiert genau eine Isometrie*

$$\phi : W_q^{1,0}(Q) \to L^q(a,b;W_q^1(\Omega)),$$

so daß $\phi_{q,q}(v) = \phi(v)$ für alle $v \in W_q^{1,0}(Q)$.

Beweis. - Es bezeichne $\phi_q \;:=\; \phi_{q,q} \;:\; L^q(Q) \;\to\; L^q(a,b;L^q(\Omega))$ die Isometrie gemäß Satz B.1. Sei $v \in W_q^{1,0}(Q)$. Wir setzen

$$u := \phi_q(v), \quad w_\alpha := \phi_q(D_\alpha v) \quad (\alpha = 1,\ldots,n).$$

Dann haben wir für beliebige $\psi \in C_c^1(\Omega)$ und $\rho \in C_c^1(a,b)$

$$\begin{aligned} \int_a^b \rho(t)\int_\Omega w_\alpha(t)\psi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;&=\; \int_Q (D_\alpha v)(x,t)\psi(x)\rho(t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;= \\ &=\; -\int_Q v(x,t)(D_\alpha\psi)(x)\rho(t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;= \\ &=\; -\int_a^b \rho(t)\int_\Omega u(t)D_\alpha\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$ [1)]

Sei $m \in \mathbb{N}, m > n/2+1$. Aufgrund der Stetigkeit der Einbettung

$$H_\circ^m(\Omega) \subset C^1(\Omega)$$

[1)] Sei $v \in L^q(Q)$. Unter Verwendung der Dichtheit der Menge $C(\overline{Q})$ in $L^q(Q)$ und der Dichtheit der Menge $\phi_q(C(\overline{Q}))$ in $L^q(a,b;L^q(\Omega))$ zeigt man, daß für beliebige $\varphi \in C(\overline{Q})$ gilt:

$$\int_Q v(x,t)\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;=\; \int_a^b\int_\Omega \phi_q(v)(t)\varphi(\cdot,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

und der Separabilität des Raumes $\overset{\circ}{H}{}^{m}(\Omega)$ existiert eine Menge $\mathcal{N} \subset (a,b)$ mit $\mathrm{mes}(\mathcal{N}) = 0$, so daß

$$w_\alpha(t) \in L^q(\Omega) \quad \forall\, t \in (a,b) \setminus \mathcal{N} \quad (\alpha = 1, \dots, n);$$

$$\text{(b.3)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega w_\alpha(t)\psi \,\mathrm{d}x \;=\; -\int_\Omega u(t) D_\alpha \psi \,\mathrm{d}x \\ \forall\, \psi \in C^1_{\mathrm{c}}(\Omega), \quad \forall\, t \in (a,b) \setminus \mathcal{N} \quad (\alpha = 1, \dots, n). \end{cases}$$

Dies zeigt, daß

$$u(t) \in W^1_q(\Omega), \quad D_\alpha u(t) \;=\; w_\alpha(t) \quad (\alpha = 1, \dots, n) \quad \forall\, t \in (a,b) \setminus \mathcal{N}.$$

Für $\lambda > 0$ bezeichne u_λ (bzw. $(w_\alpha)_\lambda$) das Steklov-Mittel [2] von u (bzw. von w_α). Dann ergibt sich aus (b.3)

$$u_\lambda(t) \in W^1_q(\Omega), \quad D_\alpha u_\lambda(t) \;=\; (w_\alpha)_\lambda(t) \;\; (\alpha = 1, \dots, n) \quad \text{für alle } \; t \in [a,b].$$

Aus der Absolutstetigkeit des Bochner-Integrals folgt somit $u_\lambda \in C([a,b]; W^1_q(\Omega))$ für alle $\lambda > 0$. Außerdem gilt:

$$\begin{cases} u_\lambda \to u, \quad (w_\alpha)_\lambda \to w_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, n) \\ \text{in} \quad L^q(a,b; L^q(\Omega)) \quad \text{für} \quad \lambda \to 0. \end{cases}$$

Somit ist (u_λ) in $L^q(a,b; W^1_q(\Omega))$ eine Cauchy-Folge, die aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwertes gegen u für $\lambda \to 0$ konvergiert. Also gilt:

$$\phi(v) := u \in L^q(a,b; W^1_q(\Omega)).$$

Insbesondere haben wir

[2] Sei $\lambda > 0$. Für $f : (a,b) \to L^1(\Omega)$ definiert man das Steklov-Mittel

$$f_\lambda(t) := \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{\lambda}\int_t^{t+\lambda} f(s)\,\mathrm{d}s & \text{für} \quad a \le t < b - \lambda \\ \displaystyle\frac{1}{\lambda}\int_t^{b} f(s)\,\mathrm{d}s & \text{für} \quad b - \lambda \le t \le b. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\|u\|^q_{L^q(a,b;W^1_q(\Omega))} &= \|u\|^q_{L^q(a,b;L^q(\Omega))} + \sum_{\alpha=1}^n \|D_\alpha u\|^q_{L^q(a,b;L^q(\Omega))} = \\ &= \|\phi_q(v)\|^q_{L^q(a,b;L^q(\Omega))} + \sum_{\alpha=1}^n \|\phi_q(D_\alpha v)\|^q_{L^q(a,b;L^q(\Omega))} = \\ &= \|v\|^q_{L^q(Q)} + \sum_{\alpha=1}^n \|D_\alpha v\|^q_{L^q(Q)} = \|v\|^q_{W^{1,0}_q(Q)}.\end{aligned}$$

Sei nun umgekehrt $u \in L^q(a,b;W^1_q(\Omega))$. Aufgrund der Bochner-Meßbarkeit von u existieren $w_\alpha \in L^q(a,b;L^q(\Omega))$ $(\alpha = 1,\dots,n)$, so daß

$$w_\alpha(t) = D_\alpha u(t) \quad \text{ffa. } t \in (a,b) \quad (\alpha = 1,\dots,n).$$

Wir setzen $v := \phi_q^{-1}(u)$. Wie oben zeigt man, daß für beliebige $\varphi \in C^1_c(Q)$ gilt:

$$\int_Q \phi_q^{-1}(w_\alpha)\varphi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\int_Q v D_\alpha \varphi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Hieraus folgt

$$v \in W^{1,0}_q(Q) \quad \text{mit} \quad D_\alpha v = \phi_q^{-1}(w_\alpha) \quad (\alpha = 1,\dots,n).$$

Also ist $\phi := \phi_q|_{W^{1,0}_q(Q)}$ eine Isometrie von $W^{1,0}_q(Q)$ auf $L^q(a,b;W^1_q(\Omega))$. ■

Mit $L^{p,q(\theta)}(Q)$ $(1 \le p,q < +\infty, 0 < \theta < 1)$ bezeichnen wir den Raum aller Funktionen $v \in L^{p,q}(\Omega)$, so daß

$$|v|^q_{L^{p,q(\theta)}(Q)} := \int_a^b \int_a^b \frac{\left(\int_\Omega |v(x,s)-v(x,t)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{q/p}}{|s-t|^{1+q\theta}} \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t < +\infty.$$

Den Raum $L^{p,q(\theta)}(Q)$, ausgestattet mit der Norm

$$\|v\|_{L^{p,q(\theta)}(Q)} := \left(\|v\|^q_{L^{p,q}(Q)} + |v|^q_{L^{p,q(\theta)}(Q)}\right)^{1/q} \quad (v \in L^{p,q(\theta)}(Q)),$$

ist ein Banach-Raum.

Satz B.3 ($L^{p,q(\theta)}(Q) \cong W^{\theta,q}(a,b;L^p(\Omega))$) *Sei $0 < \theta < 1$ und seien $1 \le p,q < +\infty$. Dann ist $\phi_{p,q}|_{L^{p,q(\theta)}(Q)}$ eine Isometrie von $L^{p,q(\theta)}(Q)$ auf $W^{\theta,q}(a,b;L^p(\Omega))$.*

Beweis. - Sei $v \in L^{p,\,q(\theta)}(Q)$. Für $\varepsilon > 0$ setzen wir

$$k_\varepsilon(s,t) := \begin{cases} |s-t|^{-1-q\theta} & \text{für} \quad s,t \in (a,b) \quad \text{mit} \quad |s-t| > \varepsilon \\ \\ 0 & \text{für} \quad s,t \in (a,b) \quad \text{mit} \quad |s-t| \le \varepsilon. \end{cases}$$

Unter Verwendung von Satz B.1 und der Dichtheit der Menge $C(\overline{Q})$ in $L^{p,q}(Q)$ erhält man

$$\begin{aligned} &\int_a^b \int_a^b k_\varepsilon(s,t)\biggl(\int_\Omega |v(\cdot,s)-v(\cdot,t)|^p \,\mathrm{d}x\biggr)^{q/p} \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \\ &\qquad = \int_a^b \int_a^b k_\varepsilon(s,t)\biggl(\int_\Omega |\phi_{p,q}(v)(s)-\phi_{p,q}(v)(t)|^p \,\mathrm{d}x\biggr)^{q/p} \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &\qquad = \int_a^b \int_a^b k_\varepsilon(s,t)\|\phi_{p,q}(v)(s)-\phi_{p,q}(v)(t)\|^q_{L^p(\Omega)} \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Hieraus schließt man mit Hilfe des Satzes von Peppo-Levi nach Ausführung des Grenzüberganges $\varepsilon \to 0$

$$\begin{aligned} &\int_a^b \int_a^b \frac{\Bigl(\int_\Omega |v(\cdot,s)-v(\cdot,t)|^p \,\mathrm{d}x\Bigr)^{q/p}}{|s-t|^{1+q\theta}} \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \\ &\qquad = \int_a^b \int_a^b \frac{\|\phi_{p,q}(v)(s)-\phi_{p,q}(v)(t)\|^q_{L^p(\Omega)}}{|s-t|^{1+q\theta}} \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Die Behauptung des Satzes folgt nun unmittelbar aus der obigen Gleichung zusammen mit Satz B.1. ■

Als nächstes notieren wir ein nützliches Interpolationsargument, welches sich elementar mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung beweisen läßt.

Lemma B.1 *Seien $-\infty \le a < b \le +\infty$ und sei $E \in \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-meßbare Menge. Seien $1 \le p_i, q_i \le +\infty$ $(i = 0,1)$ und sei $\theta \in (0,1)$. Wir definieren $p_\theta, q_\theta \in [1,+\infty]$ vermöge*

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Dann ist

$$L^{p_0}(a,b;L^{q_0}(E)) \cap L^{p_1}(a,b;L^{q_1}(E)) \subset L^{p_\theta}(a,b;L^{q_\theta}(E)),$$

und es gilt die Ungleichung:

$$\text{(b.4)}\qquad \begin{cases} \|f\|_{L^{p_\theta}(a,b;L^{q_\theta}(E))} \;\le\; \|f\|^{1-\theta}_{L^{p_0}(a,b;L^{q_0}(E))}\|f\|^{\theta}_{L^{p_1}(a,b;L^{q_1}(E))} \\ \forall\, f \in L^{p_0}(a,b;L^{q_0}(E)) \cap L^{p_1}(a,b;L^{q_1}(E)). \end{cases}$$ ■

Lemma B.2 *Seien X, Y, Z reflexible Banach-Räume ($X \subset Y \subset Z$), wobei die erste Einbettung kompakt und die zweite stetig ist. Ferner sei eine stetige lineare Abbildung $T : X \to Z$ gegeben, so daß*

$$|||\xi|||_X := \|\xi\|_Z + \|T\xi\|_Z \qquad (\xi \in X)$$

eine äquivalente Norm auf X beschreibt. Außerdem sei für ein Funktional $F \in Y^*$ die folgende Bedingung erfüllt:

$$\text{(b.5)}\qquad \ker(F) \cap \ker(T) \;=\; \{0\}.$$

Seien $0 < \theta < 1$ und seien $1 < p_0, p_1 < +\infty$ mit $\dfrac{1}{p_1} - \theta < \dfrac{1}{p_0} < \dfrac{1}{p_1}$. Dann existiert eine Konstante c_*, so daß

$$\text{(b.6)}\qquad \begin{cases} \|u\|_{L^{p_0}(0,T;Y)} \le c_* \Big(|u|_{W^{\theta,p_1}(0,T;Y)} + \|\mathcal{T} u\|_{L^{p_1}(0,T;Z)} + \Big| \displaystyle\int_0^T \langle F, u(t)\rangle \,\mathrm{d}t \Big| \Big) \;^{3)} \\ \forall\, u \in L^{p_1}(0,T;X) \cap W^{\theta,p_1}(0,T;Y), \end{cases}$$

wobei

$$|u|_{W^{\theta,p_1}(0,T;Y)} = \left(\int_0^T \int_0^T \frac{\|u(s)-u(t)\|_Y^{p_1}}{|s-t|^{1+p_1\theta}} ds\,\mathrm{d}t \right)^{1/p_1}.$$

Beweis. - Wir führen den Beweis indirekt. Wir nehmen also an, die Behauptung (b.6) sei falsch. Dann gibt es eine Folge $(u_m) \subset L^{p_1}(0,T;X) \cap W^{\theta,p_1}(0,T;Y)$, so daß

$$\text{(b.7)}\qquad \|u_m\|_{L^{p_0}(0,T;Y)} + \|\mathcal{T} u_m\|_{L^{p_1}(0,T;Z)} + |u_m|_{W^{\theta,p_1}(0,T;Y)} = 1, \;^{4)}$$

$$\text{(b.8)}\qquad \|u_m\|_{L^{p_0}(0,T;Y)} >$$

$$> m\Big(|u_m|_{W^{\theta,p_1}(0,T;Y)} + \|\mathcal{T} u_m\|_{L^{p_1}(0,T;Z)} + \Big| \int_0^T \langle F, u_m(t)\rangle \,\mathrm{d}t \Big| \Big)$$

[3] Hier ist der beschränkte lineare Operator $\mathcal{T} : L^p(0,T;X) \to L^p(0,T;Z)$ definiert gemäß der Vorschrift: $(\mathcal{T} u)(t) := T\,u(t)$ ffa. $t \in (0,T)$ $(u \in L^p(0,T;X))$ $(1 \le p < +\infty)$ (vgl. Lemma 5.3).

($m \in \mathbb{N}$). Kombiniert man (b.7) und (b.8), so erhält man

$$\text{(b.9)} \qquad \|u_m\|_{L^{p_0}(0,T;Y)} \to 1 \quad \text{für} \quad m \to +\infty,$$

$$\text{(b.10)} \qquad \begin{cases} |u_m|_{W^{\theta,\,p_1}(0,T;Y)} + \|\mathcal{T}\,u_m\|_{L^{p_1}(0,T;Z)} + \left| \displaystyle\int_0^T \langle F, u_m(t)\rangle \,\mathrm{d}t \right| \to 0 \\ \text{für} \quad m \to +\infty. \end{cases}$$

Wir zeigen nun daß,

$$\text{(b.11)} \qquad \int_0^T |\langle F, u_m(t)\rangle| \,\mathrm{d}t \to 0 \quad \text{für} \quad m \to +\infty.$$

Hierfür setzen wir

$$h_m(t) := \langle F, u_m(t)\rangle \quad (t \in (0,T); m \in \mathbb{N}).$$

Da (u_m) in $W^{\theta,\,p_1}(0,T;Y)$ beschränkt ist, folgt die Beschränktheit der Folge (h_m) in $W^{\theta,\,p_1}((0,T))$. Unter Berücksichtigung der Reflexivität von $W^{\theta,\,p_1}((0,T))$ und der Kompaktheit der Einbettung

$$W^{\theta,\,p_1}((0,T)) \subset L^{p_1}((0,T))$$

findet man eine Teilfolge $(h_{m_j}) \subset (h_m)$ und ein $h \in W^{\theta,\,p_1}((0,T))$ mit

$$\begin{cases} h_{m_j} \rightharpoonup h \text{ in } W^{\theta,\,p_1}((0,T)), \quad h_{m_j} \to h \text{ in } L^1((0,T)) \\ \text{für} \quad m \to +\infty. \end{cases}$$

Außerdem folgt aus (b.10) und der Unterhalbstetigkeit der Halbnorm $|\cdot|_{W^{\theta,\,p_1}((0,T))}$

$$\begin{aligned} |h|_{W^{\theta,\,p_1}((0,T))} &\le \liminf_{j\to\infty} |h_{m_j}|_{W^{\theta,\,p_1}((0,T))} \le \\ &\le \|F\|_{Y^*} \lim_{j\to\infty} |u_{m_j}|_{W^{\theta,\,p_1}(0,T;Y)} = 0, \end{aligned}$$

was impliziert, daß $h(t) \equiv h_0 = \text{const}$ für fast alle $t \in (0,T)$. Zusammen mit (b.10) folgt schließlich

$$\int_0^T h_0 \,\mathrm{d}t = \lim_{j\to\infty} \int_0^T \langle F, u_{m_j}(t)\rangle \,\mathrm{d}t = 0.$$

[4)] Man beachte: Mit Hilfe des Sobolevschen Einbettungssatzes und der Voraussetzung $\frac{1}{p_1} - \theta < \frac{1}{p_0}$ bestätigt man, daß $W^{\theta,p_1}(0,T;Y) \subset L^{p_0}(0,T;Y)$.

Folglich ist $h_0 = 0$, was die Eindeutigkeit des Grenzwertes der Teilfolge (h_{m_j}) impliziert, also gilt (b.11).

Wegen (b.10) und (b.11), findet man nach dem Satz von Riesz-Fischer eine Teilfolge $(u_{m_j}) \subset (u_m)$, so daß

(b.12) $$T(u_{m_j}(t)) \to 0 \quad \text{in} \quad Z \quad \text{ffa. } t \in (0,T),$$

(b.13) $$\langle F, u_{m_j}(t) \rangle \to 0 \quad \text{ffa. } t \in (0,T)$$

für $j \to +\infty$. Außerdem können wir annehmen (ggf. geht man zu einer Teilfolge über), daß

(b.14) $$(u_{m_j}(t)) \quad \text{ist beschränkt in} \quad Y \quad \text{ffa.}\, t \in (0,T).$$

In der Tat, beachtet man, daß wegen (b.7) die Folge $(\|u_{m_j}(\cdot)\|_Y)$ in $W^{\theta,p_1}((0,T))$ beschräkt ist und $W^{\theta,p_1}((0,T))$ in $L^{p_1}((0,T))$ kompakt eingebettet ist, so besitzt $(\|u_{m_j}(\cdot)\|_Y)$ eine in $L^{p_1}((0,T))$ konvergente Teilfolge. Die Aussage (b.14) bestätigt man nun mit Hilfe des Satzes von Riesz-Fischer.

Nun sei $t \in (0,T)$ so gewählt, daß für die Folge $(u_{m_j}(t)) \subset X$ die Bedingungen (b.12), (b.13) und (b.14) erfüllt sind. Aus (b.14) und der Stetigkeit der Einbettung $Y \subset Z$ folgt, daß sowohl $(u_{m_j}(t))$ als auch $(Tu_{m_j}(t))$ in Z beschränkte Folgen bilden. Berücksichtigt man außerdem, daß

$$|||u_{m_j(t)}|||_X = \|u_{m_j(t)}\|_Z + \|Tu_{m_j(t)}\|_Z,$$

so schließt man auf die Beschränktheit der Folge $(u_{m_j}(t))$ in X. Da X in Y kompakt eingebettet ist, enthält diese eine Teilfolge $(u_{m_{j_k}}(t))$, die gegen ein $\xi \in Y$ in Y konvergiert. Aus (b.12) und (b.13) folgt aber $T\xi = 0$ und $\langle F, \xi \rangle = 0$, was nach Voraussetzung $\xi = 0$ impliziert. Aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwertes konvergiert die Folge $(u_{m_j}(t))$ in Y gegen 0. Folglich gilt:

(b.15) $$u_{m_j}(t) \to 0 \quad \text{ffa.}\, t \in (0,T) \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

Als nächstes definieren wir die Folge (g_m) gemäß

$$g_m(t) := \|u_m(t)\|_Y \qquad (t \in (0,T);\, m \in \mathbb{N}).$$

Beachtet man (b.7), so folgt die Beschränktheit der Folge (g_m) in $W^{\theta,p_1}((0,T))$. Wie man sich außerdem leicht klarmacht, folgt aus den Voraussetzungen des Lemmas, daß die Einbettung $W^{\theta,p_1}((0,T)) \subset L^{p_0}((0,T))$ kompakt ist. Also ist die Menge $\{g_{m_j} \,|\, j \in \mathbb{N}\}$ in $L^{p_0}((0,T))$ präkompakt. Mit Hilfe des Satzes von Kolmogorov findet man eine positive Zahl α, so daß

$$\int_{(0,T)\cap\{g_{m_j}>\alpha\}} |g_{m_j}(t)|^{p_0}\,\mathrm{d}t \;\le\; \frac{1}{2} \qquad \forall\, j \in \mathbb{N}. \tag{b.16}$$

Wir setzen

$$\tilde{g}_{m_j}(t) \;:=\; \begin{cases} g_{m_j}(t) & \text{falls} \quad g_{m_j}(t) \;\le\; \alpha \\ 0 & \text{falls} \quad g_{m_j}(t) \;>\; \alpha, \end{cases}$$

$(j \in \mathbb{N})$. Aus (b.15) und dem Satz von Lebesgue ergibt sich

$$\|\tilde{g}_{m_j}\|_{L^{p_0}((0,T))} \to 0 \quad \text{für} \quad j \to +\infty,$$

und zusammen mit (b.16) findet man ein $j_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\forall\, j \in \mathbb{N}$ mit $j \ge j_0$:

$$\|u_{m_j}\|^{p_0}_{L^{p_0}(0,T;Y)} \;=\; \int_{(0,T)\cap\{g_{m_j}>\alpha\}} |g_{m_j}(t)|^{p_0}\,\mathrm{d}t \;+\; \int_0^T |\tilde{g}_{m_j}(t)|^{p_0}\,\mathrm{d}t \;\le\; \frac{3}{4},$$

was jedoch (b.9) widerspricht. Damit muß die Annahme falsch sein, was die Richtigkeit der Ungleichung (b.6) beweist. ■

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$. Sei $0 < \theta < 1$ beliebig fixiert. Seien $1 < p_0, p_1 < +\infty$, so daß

$$\max\left\{\frac{p_0 n}{n+p_0}, \frac{p_0}{1+\theta p_0}\right\} \;<\; p_1 \;\le\; p_0. \tag{b.17}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} Y &:= L^{p_0}(\Omega;\mathbb{R}^n), \\ Z &:= L^{p_1}(\Omega;\mathbb{R}^n), \\ X &:= \{\zeta \in Z \,|\, \zeta_1 \in W^{1,p_1}(\Omega), \zeta_2 = \cdots = \zeta_n = 0\}, \\ T\,\zeta &:= (D_1\zeta_1, \ldots, D_n\zeta_1), \quad (\zeta \in X), \\ \langle F, \zeta\rangle &:= \int_\Omega \zeta_1(x)\,\mathrm{d}x \quad (\zeta \in Y). \end{aligned}$$

Aus (b.17) folgt, daß die Einbettung $X \subset Y$ kompakt und die Einbettung $Y \subset Z$ stetig ist. Darüber hinaus folgt aus (b.17)

$$\frac{1}{p_1} - \theta < \frac{1}{p_0} < \frac{1}{p_1}.$$

Aus $\zeta \in \ker T \cap \ker F$, ergibt sich zunächst $\zeta_j \equiv 0$ $(j = 2, \ldots, n)$ und $\zeta_1 = \text{const}$. Weiterhin schließt man aus $\langle F, \zeta \rangle = 0$, daß $\zeta_1 \equiv 0$. Also ist $\ker T \cap \ker F = \{0\}$. Wir sind nun in der Lage Lemma B.1 anzuwenden und erhalten die Ungleichung

$$\|u\|_{L^{p_0}(Q)} \le c_* \Big(|u|_{W^{\theta, p_1}(0,T; L^{p_1}(\Omega))} + \|\nabla u\|_{L^{p_1}(Q)} + \Big| \int_Q u \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \Big| \Big) \tag{b.18}$$

für alle $u \in L^{p_1}(0,T; W^{1,p_1}(\Omega)) \cap W^{\theta, p_1}(0,T; L^{p_0}(\Omega))$ $(Q = \Omega \times (0,T))$.

Sei $0 < d \le 2$. Wir setzen

$$Q_r^{(d)} = Q_r^{(d)}(X_0) := B_r(x_0) \times (t_0 - r^d, t_0) \quad (X_0 = \{x_0, t_0\},\ r > 0).$$

Benutzt man die Koordinatentransformation $\Phi : Q_r^{(d)}(X_0) \to Q_1$, welche definiert ist gemäß

$$\Phi(X) = \Phi(\{x,t\}) := \Big\{ \frac{x - x_0}{r}, \frac{t - t_0}{r^d} \Big\} \qquad \Big(X = \{x,t\} \in Q_r^{(d)}(X_0) \Big),$$

so erhält man aus (b.18) unter Benutzung der Transformationsformel für das Lebesgue-Integral die folgenden Abschätzungen.

Folgerung B.1 *Sei $Q_r^{(d)} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ $(0 < r < +\infty)$ beliebig gegeben. Seien $1 < p_0, p_1 < +\infty$ und $0 < \theta < 1$, so daß die Bedingung (b.17) erfüllt ist. Dann gibt es eine positive Konstante c, die nur von θ, p_0, p_1 und n abhängt, so daß für alle $u \in W^{1,0}_{p_1}(Q_r^{(d)}) \cap W^{\theta, p_1}(t_0 - r^d, t_0; L^{p_1}(B_r))$ gilt:*

$$\begin{aligned} &\Big(\int_{Q_r^{(d)}} |u|^{p_0} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \Big)^{1/p_0} \le \\ &\le c\, r^{d\theta} \operatorname{mes}(Q_r^{(d)})^{1/p_0 - 1/p_1} \Big(\int_{t_0 - r^d}^{t_0} \int_{t_0 - r^d}^{t_0} \frac{\|u(\cdot, s) - u(\cdot, t)\|^{p_1}_{L^{p_1}(B_r)}}{|s - t|^{1 + p_1 \theta}} ds \, \mathrm{d}t \Big)^{1/p_1} + \\ &\quad + c\, r \operatorname{mes}(Q_r^{(d)})^{1/p_0 - 1/p_1} \Big(\int_{Q_r^{(d)}} |\nabla u|^{p_1} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \Big)^{1/p_1} + \\ &\quad + c \operatorname{mes}(Q_r^{(d)})^{1/p_0 - 1} \Big| \int_{Q_r^{(d)}} u \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \Big| \end{aligned} \tag{b.19}$$

und

$$\left(\int_{Q_r^{(d)}} |u - u_{Q_r^{(d)}}|^{p_0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/p_0} \le$$

$$\text{(b.20)}\quad \le c\,r^{d\theta}\,\mathrm{mes}(Q_r^{(d)})^{1/p_0-1/p_1}\left(\int_{t_0-r^d}^{t_0}\int_{t_0-r^d}^{t_0}\frac{\|u(\cdot,s)-u(\cdot,t)\|_{L^{p_1}(B_r)}^{p_1}}{|s-t|^{1+p_1\theta}}ds\,\mathrm{d}t\right)^{1/p_1} +$$

$$+\,c\,r\,\mathrm{mes}(Q_r^{(d)})^{1/p_0-1/p_1}\left(\int_{Q_r^{(d)}}|\nabla u|^{p_1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/p_1}. \qquad \blacksquare$$

Als nächstes notieren wir eine Poincaré-Ungleichung für Funktionen $u \in W_q^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N)$ $(1 < q < 2)$, welche zusätzlich einer Integralidentität genügen. Der Beweis erfolgt in ähnlicher Weise wie in [Naumann and Wolff, M. (1994)], wo solche Poincaré-Ungleichungen für den Fall $q = 2$ bewiesen wurden.

Lemma B.3 *Seien $g_i^\alpha, f_i \in L^1(Q)$ $(\alpha = 1,\dots,n; i = 1,\dots,N)$ und sei $u \in W_q^{1,0}(Q;\mathbb{R}^N)$, so daß für beliebige $\varphi \in C_c^1(Q;\mathbb{R}^N)$ gilt:*

$$\text{(b.21)}\qquad \int_Q u^i\frac{\partial\varphi^i}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_Q\left(g_i^\alpha D_\alpha\varphi^i + f_i\varphi^i\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Dann haben wir für beliebige Teilzylinder $Q_r \subset Q$ [5)]

$$\text{(b.22)}\qquad ⨍_{Q_r}|u-u_{Q_r}|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le$$

$$\le c\,r^q\left\{⨍_{Q_r}(|\nabla u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \left(⨍_{Q_r}(|g|+r|f|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^q\right\}.$$

Ist zusätzlich $g_i^\alpha, f_i \in L^q(Q;\mathbb{R}^N)$, so haben wir

$$\text{(b.23)}\quad \int_{Q_r}|u-u_{Q_r}|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le c\,r^q\left\{\int_{Q_r}(|\nabla u|^q+|g|^q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + r^q\int_{Q_r}|f|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right\},$$

wobei in (b.22) und (b.23) c eine nur von n, N und q abhängige Konstante bezeichne.

Beweis. - Seien $X_0 = \{x_0, t_0\} \in Q$ und $0 < r < \mathrm{dist}(X_0, \partial Q)$ beliebig gewählt. Sei $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine Schnittfunktion mit

$$\begin{cases}\zeta\equiv 1 \quad \text{auf } B_{r/2}, \quad \zeta\equiv 0 \quad \text{in} \quad B_r,\\ 0\le\zeta\le 1, \quad |\nabla\zeta|\le\dfrac{c_0}{r} \quad \text{in } \mathbb{R}^n.\end{cases}$$

[5)] Hier bezeichne Q_r einen parabolischen Zylinder $B_r(x_0)\times(t_0-r^2,t_0)$.

Wir setzen

$$\tilde{u}_r(t) := \frac{1}{\int_{B_r} \zeta^2 \,\mathrm{d}x} \int_{B_r} u(\cdot,t)\zeta^2 \,\mathrm{d}x \quad (t \in (t_0 - r^2, t_0)).$$

Mit einer ähnlichen Argumentation wie in [Naumann and Wolff, M. (1994)], Satz 4.1 erhält man zusammen mit der Hölderschen Ungleichung

$$\left(\int_{Q_r} |u - u_{Q_r}|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right)^{2/q} \le c\,R^2 \left(\int_{Q_r} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right)^{2/q} + \\ + c\,r^{2(n+2)/q-4} \int_{t_0-r^2}^{t_0} \int_{t_0-r^2}^{t_0} |\tilde{u}_r(s) - (\tilde{u}_r(t)|^2 \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t. \tag{b.24}$$

Um das zweite Integral auf der rechten Seite von (b.24) abzuschätzen, gehen wir ebenfalls wie in [Naumann and Wolff, M. (1994)] vor. Wir haben somit für beliebige $s, t \in (t_0 - r^2, t_0)$

$$|\tilde{u}_r(s) - \tilde{u}_r(t)|^2 \le \\ \le \frac{c}{r^{2n+2}} \left(\int_{Q_r} |g| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right)^2 + \frac{c}{r^{2n}} \left(\int_{Q_r} |f| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right)^2. \tag{b.25}$$

Die geforderte Ungleichung (b.22) ergibt sich nun unmittelbar nach Kombination von (b.24) und (b.25). Die Ungleichung (b.23) ergibt sich schließlich mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung aus (b.22). ∎

Folgerung B.2 *Sei $\omega : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ beschränkt. Ist $u \in W_q^{1,0}(Q; \mathbb{R}^N)$, so daß für beliebige $\varphi \in C_c^1(Q; \mathbb{R}^N)$ gilt:*

$$\int_Q u^i \frac{\partial \varphi^i}{\partial t} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_Q \left(g_i^\alpha D_\alpha \varphi^i + f_i \varphi^i \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \tag{b.26}$$

wobei $g_i^\alpha, f_i \in L^1(Q)\,(\alpha = 1, \ldots, n; i = 1, \ldots, N)$, dann gilt für jedes $p \in [1, +\infty)$ und für beliebige Teilzylinder $Q_r \subset Q$ mit $0 < r \le 1$ die Abschätzung

$$\left(⨍_{Q_r} [\omega(|x - x_0| + |t - t_0 + r^2|^{1/2} + |u - u_{Q_r}|)]^p \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right)^{1/p} \le \\ \le \omega(3\sqrt{r}) + c\,r^{q/2p} \left(1 + ⨍_{Q_r} (|\nabla u|^q + |g| + |f|) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right)^{q/p}, \tag{b.27}$$

wobei $c = \mathrm{const} > 0$ nur von $n, N, p, q,$ und $\sup\limits_{t \ge 0} \omega(t)$ abhängt.

Beweis. - Sei $Q_r \subset Q$ mit $0 < r \leq 1$ beliebig fixiert. Wir definieren

$$\mathcal{A} \;=\; \Big\{ x \in Q_r \,\Big|\, |u(x) - u_{Q_r}| \;\leq\; \sqrt{r} \Big\}.$$

Dann folgt elementar

$$\text{(b.28)} \qquad \bigg(\fint_{Q_r} [\omega(|x - x_0| + |t - t_0 + r^2|^{1/2} + |u - u_{Q_r}|)]^p \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \bigg)^{1/p} \;\leq$$
$$\leq\; \omega(3\sqrt{r}) \;+\; k_0 \bigg(\frac{\operatorname{mes}(Q_r \setminus \mathcal{A})}{\operatorname{mes}(Q_r)} \bigg)^{1/p},$$

wobei

$$k_0 \;=\; \sup_{t \geq 0} \omega(t).$$

Unter Verwendung der Poincaré-Ungleichung (b.22) findet man

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{mes}(Q_r \setminus \mathcal{A})}{\operatorname{mes}(Q_r)} \;&\leq \\
&\leq\; \frac{1}{r^{q/2}} \fint_{Q_r} |u - u_{Q_r}|^q \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \;\leq \\
&\leq\; c\, r^{q/2} \bigg\{ \fint_{Q_r} |\nabla u|^q \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \;+\; \bigg(\fint_{Q_r} (|g| + |f|) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \bigg)^q \bigg\} \;\leq \\
&\leq\; c\, r^{q/2} \bigg(1 \;+\; \fint_{Q_r} (|\nabla u|^q + |g| + |f|) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \bigg)^q.
\end{aligned}$$

Die Behauptung ergibt sich nun nach Einsetzen der soeben bewiesenen Abschätzung in (b.28). ■

Satz B.4 *Seien X, Y reflexive Banach-Räume und sei Y^* separabel. Außerdem sei X in Y kompakt und dicht eingebettet. Seien $0 < T < +\infty, 1 \leq p < +\infty$ und $0 < \theta < 1$. Dann ist der Raum $W^{\theta,p}(0,T;Y) \cap L^1(0,T;X)$ in $L^p(0,T;Y)$ kompakt eingebettet.*

Dem Beweis des Satzes stellen wir das folgende Lemma voran.

Lemma B.4 *Sei Y ein reflexiver Banach-Raum, und sei Y^* separabel. Sei (u_m) eine Folge in $W^{\theta,p}(0,T;Y)$ $(1 \leq p < +\infty; 0 < \theta < 1)$, so daß*

$$\text{(b.29)} \qquad u_m \rightharpoonup 0 \quad \textit{in} \quad W^{\theta,p}(0,T;Y) \quad \textit{für} \quad m \to +\infty.$$

Dann existieren eine Teilfolge (u_{m_j}) und ein $h \in L^p((0,T))$, so daß (b.30) $\qquad u_{m_j}(t) \rightharpoonup 0 \quad \textit{in} \quad Y \quad$ ffa. $t \in (0,T)$,

(b.31) $\qquad \|u_{m_j}(\cdot)\|_Y \to h \quad \textit{in} \quad L^p((0,T)) \quad \textit{für} \quad j \to +\infty.$

Beweis. - Sei $\{v_1^*, v_2^*, \ldots\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von Y^*. Aufgrund der Voraussetzung (b.29) haben wir

(b.32)
$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T \langle v_k^*, u_m(t)\rangle \zeta(t)\,\mathrm{d}t \to 0 \quad \text{für} \quad m \to +\infty \\ \forall\, \zeta \in C^1([0,T]), \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Nun definieren wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Folgen

$$g_m^{(k)}(t) := \langle v_k^*, u_m(t)\rangle \quad (t \in (0,T); m \in \mathbb{N}).$$

Aus (b.29) schließt man, daß die Folge (u_m) in $W^{\theta,p}(0,T;Y)$ beschränkt ist. Folglich ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ wegen

$$\int_0^T \int_0^T \frac{|g_m^{(k)}(s) - g_m^{(k)}(t)|^p}{|s-t|^{1+p\theta}} ds\,\mathrm{d}t \;\le\; \|v_k^*\|_{Y^*}^p \int_0^T \int_0^T \frac{\|u_m(s) - u_m(t)\|_Y^p}{|s-t|^{1+p\theta}} ds\,\mathrm{d}t,$$
$$\int_0^T |g_m^{(k)}(t)|^p\,\mathrm{d}t \;\le\; \|v_k^*\|_{Y^*}^p \int_0^T \|u_m(t)\|_Y^p\,\mathrm{d}t$$

$(m \in \mathbb{N})$ die Folge $(g_m^{(k)})$ in $W^{\theta,p}((0,T))$ beschränkt. Berücksichtigt man die Kompaktheit der Einbettung $W^{\theta,p}((0,T)) \subset L^p((0,T))$, so findet man eine Teilfolge $(g_{m_j}^{(k)})$ und ein $g^{(k)} \in L^p((0,T))$, so daß

(b.33) $\qquad g_{m_j}^{(k)} \to g^{(k)} \quad \text{in} \quad L^p((0,T)) \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$

Auf der anderen Seite ergibt sich aus (b.32)

$$g_{m_j}^{(k)} \rightharpoonup 0 \quad \text{in} \quad L^p((0,T)) \quad \text{für} \quad j \to +\infty,$$

was die Eindeutigkeit des Grenzwertes in (b.33) gewährleistet. Hiermit bestätigt man

(b.34) $\qquad g_m^{(k)} \to 0 \quad \text{in} \quad L^p((0,T)) \quad \text{für} \quad m \to +\infty.$

Mit Hilfe des Satzes von Riesz-Fischer findet man eine Teilmenge $N_1 \subset (0,T)$ mit mes(N_1) $= 0$ und eine Teilfolge $(g^{(1)}_{m_j^{(1)}})$ von $(g_m^{(1)})$, so daß

$$g^{(1)}_{m^{(1)}_j}(t) \to 0 \quad \text{für} \quad j \to +\infty \quad \forall\, t \in (0,T) \setminus N_1.$$

In der gleichen Weise findet man eine Teilmenge $N_2 \subset (0,T)$ mit $\mathrm{mes}(N_2) = 0$ und eine Teilfolge $(g^{(2)}_{m^{(2)}_j})$ von $(g^{(1)}_{m^{(1)}_j})$, so daß

$$g^{(2)}_{m^{(2)}_j}(t) \to 0 \quad \text{für} \quad j \to +\infty \quad \forall\, t \in (0,T) \setminus N_2.$$

Wir setzen diese Prozedur beliebig oft fort und finden Teilmengen $N_k \subset (0,T)$ mit $\mathrm{mes}(N_k) = 0$ und Teilfolgen $(g^{(k)}_{m^{(k)}_j}) \subset (g^{(k-1)}_{m^{(k-1)}_j})$, so daß

$$g^{(k)}_{m^{(k)}_j}(t) \to 0 \quad \text{für} \quad j \to +\infty \quad \forall\, t \in (0,T) \setminus N_k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Für die Diagonalfolge erhalten wir dann

$$\text{(b.35)} \qquad \langle v^*_k, u_{m^{(j)}_j}(t) \rangle \to 0 \quad \text{für} \quad j \to +\infty \quad \forall\, t \in (0,T) \setminus \bigcup_{l=1}^{\infty} N_l \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Nun setzen wir

$$h_m(t) := \|u_m(t)\|_Y \quad (t \in (0,T); m \in \mathbb{N}).$$

Wie man sich leicht aus den Voraussetzungen klarmacht, ist die Folge (h_m) in $W^{\theta,p}((0,T))$ beschränkt, also in $L^p((0,T))$ präkompakt. Dann existieren eine Menge $N_0 \subset (0,T)$ mit $\mathrm{mes}(N_0) = 0$, eine Teilfolge (m'_j) von $(m^{(j)}_j)$ und ein $h \in L^p((0,T))$, so daß:

$$\text{(b.36)} \qquad \begin{cases} h_{m'_j} \to h \quad \text{in} \quad L^p((0,T)),\ h_{m'_j}(t) \to h(t)\ \forall\, t \in (0,T) \setminus N_0 \\ \text{für} \quad j \to +\infty. \end{cases}$$

Wir setzen $\mathcal{N} := \bigcup_{k=0}^{\infty} N_k$. Wegen $\mathrm{mes}(N_k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\mathrm{mes}(\mathcal{N}) = 0$.

Sei $t \in (0,T) \setminus \mathcal{N}$. Berücksichtigt man die Dichtheit der Menge $\{v^*_1, v^*_2, \ldots\}$ in Y^*, so folgert man aus (b.35) und der Beschränktheit der Folge $u_{m'_j}(t)$ in Y (siehe (b.36)), daß

$$u_{m'_j}(t) \rightharpoonup 0 \quad \text{in} \quad Y \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

Zusammen mit (b.36) folgt die Behauptung des Lemmas. ∎

Beweis von Satz B.4 - Sei (u_m) eine in $W^{\theta,p}(0,T;Y) \cap L^1(0,T;X)$ beschränkte Folge gegeben, so daß

$$u_m \rightharpoonup 0 \quad \text{in} \quad W^{\theta,p}(0,T;Y) \quad \text{für} \quad m \to +\infty.$$

Nach Lemma B.4 gibt es eine Teilmenge $\mathcal{N} \subset (0,T)$ mit $\text{mes}(\mathcal{N}) = 0$, eine Teilfolge (u_{m_j}) und ein $h \in L^p((0,T))$, so daß

$$\text{(b.37)} \qquad \begin{cases} u_{m_j}(t) \rightharpoonup 0 \quad \text{in} \quad Y \quad \forall\, t \in (0,T) \setminus \mathcal{N}; \\[2ex] \|u_{m_j}(\cdot)\|_Y \to h \quad \text{in} \quad L^p((0,T)) \quad \text{für} \quad j \to +\infty. \end{cases}$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig fixiert. Wir definieren

$$\lambda := \frac{2^{1-p}}{\varepsilon} \sup_{m \in \mathbb{N}} \|u_m\|_{L^1(0,T;X)} < +\infty,$$

$$v_m(t) := \begin{cases} u_m(t) & \text{falls} \quad \|u_m(t)\|_X < \lambda \|u_m(t)\|_Y^p \\[2ex] 0 & \text{falls} \quad \|u_m(t)\|_X \geq \lambda \|u_m(t)\|_Y^p. \end{cases}$$

Sei $t \in (0,T) \setminus \mathcal{N}$ beliebig gewählt. Aus (b.37), folgt die Beschränktheit der Folge $(v_{m_j}(t))$ in Y. Nach Definition ist diese dann auch in X beschränkt. Da nach Voraussetzung X in Y kompakt eingebettet ist, existieren eine Teilfolge $(v_{m_{j_k}}(t))$ und ein $\xi \in Y$, so daß

$$v_{m_{j_k}}(t) \to \xi \quad \text{in} \quad Y \quad \text{für} \quad k \to +\infty.$$

Falls $v_{m_{j_k}}(t) = 0$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$, so ist sicherlich $\xi = 0$. Im entgegengesetzten Fall existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß $v_{m_{j_k}}(t) = u_{m_{j_k}}(t)$ für alle $k \geq k_0$. Auch in diesem Fall gilt $\xi = 0$, da nach (b.37) die Folge $(v_{m_{j_k}}(t))$ in Y schwach gegen 0 konvergiert. Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes folgt

$$v_{m_j}(t) \to 0 \quad \text{in} \quad Y \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

Das heißt, die Folge $(v_{m_j}(\cdot))$ konvergiert fast überall in $(0,T)$ gegen 0. Auf der anderen Seite haben wir

$$\|v_{m_j}(t)\|_Y \leq \|u_{m_j}(t)\|_Y \quad \forall\, t \in (0,T) \quad (j \in \mathbb{N}),$$

was zusammen mit (b.37) unter Benutzung des Konvergenzsatzes von Lebesgue impliziert, daß

$$v_{m_j} \to 0 \quad \text{in} \quad L^p(0,T;Y) \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

Schließlich bekommt man

$$
\begin{aligned}
\limsup_{j\to\infty} \|u_{m_j}\|^p_{L^p(0,T;Y)} &\le 2^{p-1} \limsup_{j\to\infty} \int_0^T \|u_{m_j}(t) - v_{m_j}(t)\|^p_Y \,\mathrm{d}t + \\
&\quad + 2^{p-1} \lim_{j\to\infty} \int_0^T \|v_{m_j}(t)\|^p_Y \,\mathrm{d}t \\
&\le \frac{2^{p-1}}{\lambda} \sup_{j\in\mathbb{N}} \int_0^T \|u_{m_j}(t)\|_X \,\mathrm{d}t \le \varepsilon,
\end{aligned}
$$

und da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt wurde, folgt $u_{m_j} \to 0$ in $L^p(0,T;Y)$ für $j \to +\infty$. ■

Anmerkung B.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$. Wir setzen $X = W^1_p(\Omega)$ $(2n/(n+2) < p \le +\infty)$ und $Y = L^2(\Omega)$. Dann ist X kompakt in Y eingebettet. Somit ist nach Satz B.4 für beliebige $0 < \theta < 1$ die Einbettung

$$
H^\theta(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^p(0,T;W^1_p(\Omega)) \subset L^2(Q)
$$

kompakt $(Q = \Omega \times (0,T);\ 0 < T < +\infty)$. ■

Zur Ergänzung machen wir noch einige Ausführungen bezüglich der Morrey-und Campanato-Räume, die wir im Kapitel 9 benutzten. Wir beginnen mit der Definition eines Campanato-Raumes, der ähnlich wie im elliptischen Fall in den Raum der stetigen Funktionen eingebettet ist. Dazu benötigen wir die folgenden Bezeichnungen:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $0 < T < +\infty$. In den folgenden Betrachtungen bezeichne Q den Zylinder $\Omega \times (0,T)$. Für $X_0 = \{x_0, t_0\} \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $r > 0$ setzen wir

$$
\begin{aligned}
\tilde{Q}_r = \tilde{Q}_r(X_0) &:= \{X \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |t - t_0| < r^2; |x - x_0| < r\} = \\
&= B_r(x_0) \times (t_0 - r^2, t_0 + r^2).
\end{aligned}
$$

Dann ist der Zylinder $\tilde{Q}_r$ die offene Kugel mit Radius r und Mittelpunkt X_0 bezüglich der parabolischen Metrik

$$
d(X,Y) := \max\{|x-y|, |t-s|^{1/2}\} \quad (X = \{x,t\}, Y = \{y,s\} \in \mathbb{R}^{n+1}).
$$

Definition B.1 *Sei* $\omega : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *nichtfallend. Sei* $p \in [1,+\infty)$. *Dann bezeichne* $\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(Q)$ *die Menge aller* $u \in L^p(Q)$ *mit*

$$
[u]^p_{\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(Q)} := \sup_{\substack{0<r\le \mathrm{diam}(Q)\\ X_0\in Q}} \left\{ \frac{1}{r^{n+2}\omega(r)} \int_{\tilde{Q}_r(X_0)\cap Q} |u - u_{\tilde{Q}_r(X_0)\cap Q}|^p \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right\} < +\infty.
$$

$\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(Q)$ *ist ein linearer Raum, der mit der Norm*

$$\|u\|_{\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(Q)} := \Big(\|u\|^p_{L^p(Q)} \,+\, [u]^p_{\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(Q)}\Big)^{1/p} \qquad (u \in \mathfrak{L}^p_{(\omega)}(Q))$$

ein Banach-Raum ist. ■

Wir haben nun den folgenden nützlichen Einbettungssatz.

Satz B.5 *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *eine reguläre offene und beschränkte Menge. Sei* $p \in [1, +\infty)$ *und sei* $\omega : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *nichtfallend mit*

$$\text{(b.38)} \qquad \int_0^1 \frac{\omega(r)}{r}\,\mathrm{d}r < +\infty.$$

Dann ist $\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(Q)$ *stetig in* $C(\overline{Q})$ *eingebettet.*

Beweis. - Da Ω regulär ist, existiert eine Konstante $\delta_0 > 0$, so daß

$$\text{(b.39)} \qquad \operatorname{mes}(\tilde{Q}_r(X_0) \cap Q) \,\geq\, \delta_0 r^{n+2} \quad \forall\, X_0 \in Q, \forall\, 0 < r < \operatorname{diam}(Q).$$

1) Sei $X_0 \in Q$ beliebig gewählt. Seien $0 < \rho_1 < \rho_2 \leq R_0 := \operatorname{diam}(Q)/2$. Wie im Beweis von Satz A.1 zeigt man unter Verwendung von Lemma A.11 die folgende Ungleichung

$$\text{(b.40)} \qquad \Big|u_{\tilde{Q}_{\rho_1}(X_0)\cap Q} - u_{\tilde{Q}_{\rho_2}(X_0)\cap Q}\Big| \,\leq\, c_1\,[u]_{\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(Q)}\omega(\rho_2)\Big(\frac{\rho_2}{\rho_1}\Big)^{(n+2)/p}$$

($c_1 = \text{const}$). Setzt man in dieser Ungleichung insbesondere $\rho_1 = 2^{-(j+1)}R_0$ und $\rho_2 = 2^{-j}R_0\,(j \in \mathbb{N} \cup \{0\})$, so folgt

$$\text{(b.41)} \qquad \Big|u_{\tilde{Q}_{2^{-j}R_0}(X_0)\cap Q} - u_{\tilde{Q}_{2^{-(j+1)}R_0}(X_0)\cap Q}\Big| \,\leq\, 2^{(n+2)/p}c_1\,[u]_{\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(Q)}\omega(2^{-j}R_0).$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung und der Ungleichung (a.25) bekommt man für beliebige $m, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,(l < m)$

$$\begin{aligned}
&\Big|u_{\tilde{Q}_{2^{-l}R_0}(X_0)\cap Q} - u_{\tilde{Q}_{2^{-m}R_0}(X_0)\cap Q}\Big| \,\leq \\
&\quad\leq\, 2^{(n+2)/p}c_1\,[u]_{\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(Q)}\sum_{j=l}^{m-1}\omega(2^{-j}R_0) \,\leq \\
&\quad\leq\, 2^{(n+2)/p}c_1\,[u]_{\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(Q)}\Big(2\int_0^{2^{-l}R_0}\frac{\omega(r)}{r}\,\mathrm{d}r \,+\, \omega(2^{-l}R_0)\Big),
\end{aligned}$$

was impliziert, daß $\left(u_{\tilde{Q}_{2^{-m}R_0}(X_0)\cap Q}\right)$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist. Wir setzen

$$\tilde{u}(X_0) := \lim_{m\to\infty} u_{\tilde{Q}_{2^{-m}R_0}(X_0)\cap Q}.$$

Nach Ausführung des Grenzüberganges $m \to +\infty$ in der letzten Ungleichung bekommt man für beliebiges $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\text{(b.42)} \qquad \left|\tilde{u}(X_0) - u_{\tilde{Q}_{2^{-l}R_0}(X_0)\cap Q}\right| \le$$
$$\le\ 2^{(n+2)/p} c_1\, [u]_{\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(Q)} \left(2 \int_0^{2^{-l}R_0} \frac{\omega(r)}{r}\, \mathrm{d}r\ +\ \omega(2^{-l}R_0)\right).$$

Analog wie im Beweis von Satz A.1 zeigt man, daß für alle $0 < R \le R_0$ gilt:

$$\text{(b.43)} \qquad \left|\tilde{u}(X_0) - u_{\tilde{Q}_R(X_0)\cap Q}\right|\ \le\ 2^{(n+2)/p+1} c_1\, [u]_{\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(Q)} \left(\int_0^R \frac{\omega(r)}{r}\, \mathrm{d}r\ +\ \omega(R)\right).$$

2) Seien $X_1, X_2 \in Q$ mit $R := d(X_1, X_2) \le R_0$. Dann bestätigt man mit Hilfe der Dreiecksungleichung, daß

$$\tilde{Q}_R(X_i) \subset \tilde{Q}_{2R}(X_1) \quad (i = 1, 2).$$

Wie im Beweis von Satz A.1 erhält man unter Benutzung von Lemma A.11

$$\text{(b.44)} \qquad \left|u_{\tilde{Q}_R(X_1)\cap Q} - u_{\tilde{Q}_R(X_2)\cap Q}\right|\ \le\ c\,\omega(2R)[u]_{\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(Q)}$$

(c = const). Benutzt man die Dreiecksungleichung und wendet man anschließend die beiden Ungleichungen (b.43) und (b.44) an, so ergibt sich

$$|\tilde{u}(X_1) - \tilde{u}(X_2)|\ \le\ c\,[u]_{\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(Q)} \left(\int_0^R \frac{\omega(r)}{r}\, \mathrm{d}r\ +\ \omega(2R)\right).$$

Hiermit erkennt man, daß die Funktion $\tilde{u}$ auf Q gleichmäßig stetig und beschränkt ist. Es bleibt also noch zu zeigen, daß $\tilde{u}(X) = u(X)$ für fast alle $X \in Q$ ist. Hierfür definieren wir die Folge $(u_m) \subset L^1(Q)$ durch

$$u_m(X) := u_{\tilde{Q}_{2^{-m}R_0}(X)\cap Q} \quad (X \in Q).$$

Wir wählen $m_0 \in \mathbb{N}$ so groß, daß $\tilde{Q}_{2^{-m}R_0}(X) \cap Q = \tilde{Q}_{2^{-m}R_0}$. Nach Anwendung der Transformationsformel und des Satzes von Fubini bekommt man für alle $m \in \mathbb{N}\,(m \ge m_0)$

$$\int_Q |u - u_m| \,\mathrm{d}X \le \frac{1}{2\,\mathrm{mes}(B_1)} \int_{\tilde{Q}_1} \int_Q |u(X) - u(X + 2^{-m} R_0 Y)| \,\mathrm{d}X \,\mathrm{d}Y.$$

Aufgrund der Stetigkeit im Mittel konvergiert die rechte Seite der obigen Ungleichung gegen 0 für $m \to +\infty$. Nach dem Satz von Riesz-Fischer existiert somit eine Teilfolge (u_{m_j}), so daß

$$u_{m_j}(X) \to u(X) \quad \text{ffa. } X \in Q.$$

Auf der anderen Seite gilt $u_m(X) \to \tilde{u}(X)$ für alle $X \in Q$, was $u(X) = \tilde{u}(X)$ für fast alle $X \in Q$ impliziert.

Wie im Beweis von Satz A.1 ergibt sich aus (b.42) ($l = 0$) mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$|\tilde{u}(X)| \le c\Big(\|u\|_{L^p(Q)} + [u]_{\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(Q)} \Big) \le c\, \|u\|_{\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(Q)}$$

für alle $X \in Q$ ($c = \text{const}$), was die Stetigkeit der Einbettung $\mathfrak{L}^p_{(\omega)}(Q) \subset C(\overline{Q})$ beweist. ■

In den nachfolgenden Ausführungen sei $d \in [1,2]$ fixiert. Sei $X_0 = \{x_0, t_0\} \in \mathbb{R}^{n+1}$ und sei $0 < r < +\infty$. Wir setzen

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_r^{(d)} &= \tilde{Q}_r^{(d)}(X_0) := \Big\{ X \in \mathbb{R}^{n+1} \,\Big|\, |x - x_0| < r,\ |t - t_0|^{1/d} < r \Big\} = \\ &= B_r(x_0) \times (t_0 - r^d, t_0 + r^d). \end{aligned}$$

Wir bemerken, daß der Zylinder $\tilde{Q}_r^{(d)}(X_0)$ die offene Kugel mit dem Mittelpunkt X_0 und dem Radius $r > 0$ bezüglich der folgenden Metrik ist:

$$\rho_d(X, Y) := \max\{|x - y|, |t - s|^{1/d}\} \quad (X = \{x, t\}, Y = \{y, s\} \in \mathbb{R}^{n+1}).$$

Definition B.2 *Sei* $1 \le p \le +\infty$.

1. *Mit* $L^{p,\lambda}_d(Q)$ $(0 \le \lambda \le n + d)$ *bezeichnen wir den* **Morrey-Raum**, *aller Funktionen* $u \in L^p(Q)$ *mit*:

$$\|u\|^p_{L^{p,\lambda}_d(Q)} := \sup_{\substack{0 < r \le \mathrm{diam}(Q) \\ X_0 \in Q}} \left\{ r^{-\lambda} \int_{\tilde{Q}_r^{(d)}(X_0) \cap Q} |u|^p \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \right\} < +\infty.$$

2. *Mit* $\mathfrak{L}^{p,\lambda}_d(Q)$ $(0 \le \lambda \le n + d + p)$ *bezeichnen wir den* **Campanato-Raum** *aller* $u \in L^p(Q)$, *für die gilt*:

$$[u]^p_{\mathfrak{L}^{p,\lambda}_d(Q)} := \sup_{\substack{0 < r \le \mathrm{diam}(Q) \\ X_0 \in Q}} \left\{ r^{-\lambda} \int_{\tilde{Q}_r^{(d)}(X_0) \cap Q} |u - u_{Q_r^{(d)}(X_0) \cap Q}|^p \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \right\} < +\infty.$$

Auf $\mathfrak{L}_d^{p,\lambda}(Q)$ *definieren wir die folgende Norm*

$$\|u\|_{\mathfrak{L}_d^{p,\lambda}(Q)} := \Big(\|u\|^p_{L^p(Q)} + [u]^p_{\mathfrak{L}_d^{p,\lambda}(Q)}\Big)^{1/p}.$$

Wir bemerken, daß $L_d^{p,\lambda}(Q)$ *und* $\mathfrak{L}_d^{p,\lambda}(Q)$ *Banach-Räume sind.* ■

Satz B.6 *Sei* Ω *regulär. Dann gilt*:

(i) *Die Räume* $L_d^{p,\lambda}(Q)$ *und* $\mathfrak{L}_d^{p,\lambda}(Q)$ *sind für* $0 < \lambda < n + d$ *zueinander isomorph.*

(ii) *Für* $0 < \gamma < 1$ *ist der Raum* $\mathfrak{L}_d^{p,\,n+d+p\gamma}(Q)$ *isomorph zum Raum der Hölder-stetigen Funktionen* $C^{\gamma,\gamma/d}(\overline{Q})$. [6)]

Beweis. - (i) Die Äquivalenz der Räume $\mathfrak{L}_d^{p,\lambda}(Q)$ und $L_d^{p,\lambda}(Q)$ beweist man völlig analog wie im Fall der bekannten Morrey- und Campanato-Räume (siehe in [Da Prato (1965), Giaquinta (1983), Kufner et al. (1977)]).

(ii) Die stetige Einbettung

$$C^{\gamma,\gamma/d}(\overline{Q}) \subset \mathfrak{L}_d^{p,\,n+d+p\gamma}(Q)$$

verifiziert man leicht unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung.

(iii) *Die Stetigkeit der Einbettung* $\mathfrak{L}_d^{p,\,n+d+p\gamma}(Q) \subset C^{\gamma,\gamma/d}(\overline{Q})$: 1) Sei $X_0 \in Q$ beliebig fixiert. Seien $0 < \rho_1 < \rho_2 \le R_0 := \operatorname{diam}(Q)/2$. Unter Verwendung von Lemma A.11 und einer analogen Argumentation, die zu (b.40) führte, bestätigt man die Ungleichung

$$\text{(b.45)} \qquad \left| u_{\tilde{Q}^{(d)}_{\rho_1}(X_0)\cap Q} - u_{\tilde{Q}^{(d)}_{\rho_2}(X_0)\cap Q} \right| \le c_1\,[u]_{\mathfrak{L}_d^{p,\,n+d+p\gamma}(Q)} \rho_2^\gamma \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{(n+d)/p}$$

($c_1 = \text{const}$). Setzt man in (b.45) insbesondere $\rho_1 := 2^{-(j+1)}R_0$ und $\rho_2 := 2^{-j}R_0$ ($j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), so ergibt sich

$$\text{(b.46)} \qquad \left| u_{\tilde{Q}^{(d)}_{2^{-(j+1)}R_0}(X_0)\cap Q} - u_{\tilde{Q}^{(d)}_{2^{-j}R_0}(X_0)\cap Q} \right| \le 2^{(n+d)/p} c_1\,[u]_{\mathfrak{L}_d^{p,\,n+d+p\gamma}(Q)} 2^{-j\gamma} R_0^\gamma.$$

Aus (b.46) folgt unter Verwendung der Dreiecksungleichung für beliebige $m, l \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ ($l < m$) die folgende Ungleichung

$$\text{(b.47)} \qquad \left| u_{\tilde{Q}^{(d)}_{2^{-m}R_0}(X_0)\cap Q} - u_{\tilde{Q}^{(d)}_{2^{-l}R_0}(X_0)\cap Q} \right| \le 2^{(n+d)/p} c_1\,[u]_{\mathfrak{L}_d^{p,\,n+d+p\gamma}(Q)} \sum_{j=l}^{m-1} 2^{-j\gamma} R_0^\gamma.$$

[6)] Hierbei bezeichne $C^{\gamma,\gamma/d}(\overline{Q})$ den Raum aller Hölder-stetigen Funktionen auf Q bezüglich der Metrik ρ_d.

Dies bestätigt, daß $\left(u_{\tilde{Q}^{(d)}_{2^{-m}R_0}(X_0)\cap Q}\right)$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist. Nun setzen wir

$$\tilde{u}(X_0) := \lim_{m\to\infty} u_{\tilde{Q}^{(d)}_{2^{-m}R_0}(X_0)\cap Q}.$$

Führt man in (b.47) den Grenzübergang $m \to +\infty$ aus, so folgt für beliebige $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\text{(b.48)} \qquad \left|\tilde{u}(X_0) - u_{\tilde{Q}^{(d)}_{2^{-l}R_0}(X_0)\cap Q}\right| \leq \frac{2^{(n+d)/p} c_1 \, [u]_{\mathfrak{L}^{p,\,n+d+p\gamma}_d(Q)}}{1-2^{\gamma}} 2^{-l\gamma} R_0^{\gamma}.$$

Sei $0 < R \leq R_0$ beliebig gewählt. Dann existiert ein $l \in \mathbb{N}$, so daß

$$2^{-l}R_0 < R \leq 2^{-l+1}R_0.$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung und Anwendung der Abschätzungen (b.48) und (b.45) (mit $\rho_1 = 2^{-l}R_0$ und $\rho_2 = R$) erhält man

$$\text{(b.49)} \qquad \left|\tilde{u}(X_0) - u_{\tilde{Q}^{(d)}_R(X_0)\cap Q}\right| \leq c\,[u]_{\mathfrak{L}^{p,\,n+d+p\gamma}_d(Q)} \, R^{\gamma}$$

($c = \text{const}$ unabhängig von R), was zeigt daß $u_{\tilde{Q}^{(d)}_R(X_0)\cap Q} \to \tilde{u}(X_0)$ für $R \to 0$.

2) Seien $X_1, X_2 \in Q$, so daß $R := \rho_d(X, Y) \leq R_0$. Analog wie der Beweis der Ungleichung (b.44) unter Verwendung von Lemma A.11 bekommt man

$$\text{(b.50)} \qquad \left|u_{\tilde{Q}^{(d)}_R(X_1)\cap Q} - u_{\tilde{Q}^{(d)}_R(X_2)\cap Q}\right| \leq c\,[u]_{\mathfrak{L}^{p,\,n+d+p\gamma}_d(Q)} \, R^{\gamma}.$$

Benutzt man die Dreiecksungleichung, und wendet man anschließend die Abschätzung (b.50) und die Abschätzung (b.49) jeweils mit $X_0 = X_1$ und $X_0 = X_2$ an, so ergibt sich

$$|\tilde{u}(X_1) - \tilde{u}(X_2)| \leq c\,[u]_{\mathfrak{L}^{p,\,n+d+p\gamma}_d(Q)} \, R^{\gamma},$$

also

$$\frac{|\tilde{u}(X_1) - \tilde{u}(X_2)|}{(\rho_d(X_1, X_2))^{\gamma}} \leq c\,[u]_{\mathfrak{L}^{p,\,n+d+p\gamma}_d(Q)} \qquad (c = \text{const}).$$

Diese Abschätzung impliziert $\tilde{u} \in C^{\gamma,\gamma/d}(\overline{Q})$. Wir müssen uns also nur klar machen, daß $\tilde{u}$ ein Vertreter der Äquivalenzklasse u ist. Hierfür definiert man die Folge $(u_m) \subset L^1(Q)$ durch

$$u_m(X) := u_{\tilde{Q}^{(d)}_{2^{-m}R_0}(X)\cap Q} \qquad (X \in Q).$$

Ähnlich wie im Beweis von Satz B.5 zeigt man unter Berücksichtigung der Stetigkeit im Mittel, daß

$$u_m \to u \quad \text{in} \quad L^1(Q) \quad \text{für} \quad m \to +\infty.$$

Unter Verwendung des Satzes von Riesz-Fischer und der Tatsache, daß $u_m(X) \to \tilde{u}(X)$ für alle $X \in Q$ folgt $\tilde{u}(X) = u(X)$ für fast alle $X \in Q$. ■

Anmerkung B.2 (Äquivalente Normierung):
1.) Für $u \in L_d^{p,\lambda}(Q)$ ist der Ausdruck

$$\|u\|'_{L_d^{p,\lambda}(Q)} := \Bigg(\sup_{\substack{0<r\leq \operatorname{diam}(Q) \\ X_0 \in Q}} \left\{ r^{-\lambda} \int_{Q_r^{(d)} \cap Q} |u|^p \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \right\} \Bigg)^{1/p}$$

endlich und definiert eine äquivalente Normierung auf $L_d^{p,\lambda}(Q)$. Dies macht man sich mit Hilfe der folgenden Abschätzung klar:

Seien $X_0 = \{x_0, t_0\} \in Q$, $0 < r < \operatorname{diam}(Q)/2$. Setzt man $X_0' := \{x_0, t_0'\}$ ($t_0' := t_0 - r^d$) und $r' := 2^{1/d} r$, so gilt:

$$\begin{aligned} r^{-\lambda} \int_{\tilde{Q}_r^{(d)}(X_0) \cap Q} |u|^p \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \;&=\; r^{-\lambda} \int_{\max\{t_0 - r^d, 0\}}^{\min\{t_0 + r^d, T\}} \int_{B_r(x_0) \cap \Omega} |u|^p \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \;\leq \\ &\leq\; 2^{\lambda/d} r'^{-\lambda} \int_{\max\{t_0' - r'^d, 0\}}^{\min\{t_0', T\}} \int_{B_{r'}(x_0) \cap \Omega} |u|^p \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \;= \\ &=\; 2^{\lambda/d} r'^{-\lambda} \int_{Q_{r'}^{(d)}(X_0') \cap Q} |u|^p \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \;\leq\; 2^{\lambda/d} \|u\|'^p_{L_d^{p,\lambda}(Q)}. \end{aligned}$$

2.) Für $u \in \mathfrak{L}^{p,\lambda}(Q)$ ist

$$[u]'_{\mathfrak{L}_d^{p,\lambda}(Q)} := \Bigg(\sup_{\substack{0<r\leq \operatorname{diam}(Q) \\ X_0 \in Q}} \left\{ r^{-\lambda} \int_{Q_r^{(d)}(X_0) \cap Q} |u - u_{Q_r^{(d)}(X_0) \cap Q}|^p \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \right\} \Bigg)^{1/p}$$

endlich und der Ausdruck

$$\|u\|'_{\mathfrak{L}_d^{p,\lambda}(Q)} := \Big(\|u\|^p_{L^p(Q)} + [u]'_{\mathfrak{L}^{p,\lambda}(Q)} \Big)^{1/p}$$

definiert eine äquivalente Normierung auf $\mathfrak{L}_d^{p,\lambda}(Q)$.

Um diese Aussage zu beweisen, gehen wir ähnlich wie in 1.) vor: Seien $X_0 \in Q$ und $0 < r < \operatorname{diam}(Q)/2$. Zunächst findet man mit Hilfe des Satzes von Fubini und der Dreiecksungleichung

$$\left(r^{-\lambda} \int_{Q_r^{(d)} \cap Q(X_0)} |u - u_{Q_r^{(d)}(X_0) \cap Q}|^p \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t\right)^{1/p} \le$$

$$\le 2\left(r^{-\lambda} \int_{\tilde{Q}_r^{(d)} \cap Q(X_0)} |u - u_{\tilde{Q}_r^{(d)}(X_0) \cap Q}|^p \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t\right)^{1/p} \le$$

$$\le 2[u]_{\mathfrak{L}_d^{p,\lambda}(Q)},$$

also

$$[u]'_{\mathfrak{L}_d^{p,\lambda}(Q)} \le 2\,[u]_{\mathfrak{L}_d^{p,\lambda}(Q)}.$$

Setzt man andererseits $X_0' := \{x_0, t_0'\}$ ($t_0' := t_0 - r^d$) und $r' := 2^{1/d} r$, so folgt wie in 1.) unter Verwendung des Satzes von Fubini

$$r^{-\lambda} \int_{\tilde{Q}_r^{(d)} \cap Q(X_0)} |u - u_{\tilde{Q}_r^{(d)}(X_0) \cap Q}|^p \, \mathrm{d}X =$$

$$= \frac{r^{-\lambda}}{|\tilde{Q}_r^{(d)} \cap Q(X_0)|} \int_{\tilde{Q}_r^{(d)} \cap Q(X_0)} \int_{\tilde{Q}_r^{(d)} \cap Q(X_0)} |u(X) - u(Y)|^p \, \mathrm{d}X \, \mathrm{d}Y \le$$

$$\le 2^{p-1} r^{-\lambda} \int_{\tilde{Q}_r^{(d)} \cap Q(X_0)} |u - u_{Q_{r'}^{(d)}(X_0') \cap Q}|^p \, \mathrm{d}X \le$$

$$\le 2^{p-1+\lambda/d} r'^{-\lambda} \int_{Q_{r'}^{(d)} \cap Q(X_0')} |u - u_{Q_{r'}^{(d)}(X_0') \cap Q}|^p \, \mathrm{d}X \le$$

$$\le 2^{p-1+\lambda/d} [u]'^p_{\mathfrak{L}_d^{p,\lambda}(Q)},$$

was die Äquivalenz der beiden Normen bestätigt. ■

Bibliography

Acerbi, E. and Fusco, N. (1989). Regularity for minimizers of non-quadratic functionals: the case $1 < p < 2$. *J. Math. Appl.*, 140:337–403.

Campanato, S. (1963). Propietà di Hölderianità di alcune classi di funzioni. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 17:175–188.

Campanato, S. (1965). Equazioni ellittiche del secondo ordine e spazi $\mathfrak{L}^{2,\lambda}$. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 69:321–380.

Campanato, S. (1978). Partial Hölder continuity of the gradient of solutions of some nonlinear elliptic systems. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 59:147–165.

Campanato, S. (1982). Hölder continuity and partial Hölder continuity results for $H^{1,q}-$solutions of non-linear elliptic systems with controlled growth. *Rend. del Sem. Mat. Milano*, 52:435–472.

Campanato, S. (1983). Recent regularity results for $H^{1,q}-$solutions of non linear elliptic systems. *Conf. Sem. Mat. Univ. Bari*, pages 1–22.

Campanato, S. (1984). On the nonlinear parabolic systems in divergence form. Hölder continuity and partial Hölder continuity of the solutions. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 137:83–122.

Campanato, S. (1986). A maximum principle for non-linear elliptic systems. *Atti Convegno Celebrativo Nascita M. Picone e L. Tonelli, Accad. Lincei, Roma*, pages 173–182.

Da Prato, G. (1965). Spazi $L^{2,\theta}(\Omega, \delta)$ e loro proprietà. *Ann. Mat. Pura Appl.(4)*, 69:383–392.

De Giorgi, E. (1957). Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regulari. *Mem. Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3)*, 3:25–43.

De Giorgi, E. (1968). Un esempio di estremali discontinue per un problema variazionale di tipo ellittico. *Boll. UMI*, 4:135–137.

Frehse, J. and Seregin, G.A. (1999). Title No. 2. *Full regularity for a class of degenerated parabolic systems in two spatial variables.*, 99(4):517–539.

Gajewski, H. and Gröger, K. and Zacharias (1974). *Nichtlineare Operationgleichungen und Operatordifferentialgleichungen.* Akademie-Verlag, Berlin.

Gehring, F. W. (1973). L^p-integrability of the partial derivatives of a quasi conformal mapping. *Acta. Math.*, 130:265–277.

Giaquinta, M. (1983). *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems.* Annals Math. Studies, no. 105, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.

Giaquinta, M. and Modica, G. (1979a). Almost-everywhere regularity results for solutions of nonlinear elliptic systems. *Manuscripta Math.*, 28:109–158.

Giaquinta, M. and Modica, G. (1979b). Regularity results for some classes of higher order nonlinear elliptic systems. *J. für reine u. angew. Math.*, 311/312:145–169.

Gilbarg, D. and Trudinger, N.S. (1977). *Elliptic partial differential equations of second order.* Springer-Verlag, Heidelberg, New York.

Giusti, E. (1969). Regularità parziale delle soluzioni di sistemi ellittici quasi lineari di ordine arbitrario. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 23:115–141.

Giusti, E. and Miranda, M (1968). Un esempio di soluzioni discontinue per un problema di minimo relativo ad un integrale regolare del calcolo delle variazioni. *Boll. UMI*, 2:1–8.

Ivert, P.-A. and Naumann, J. (1988). Higher integrability by reverse Hölder inequality (the parabolic case). *Preprint Dip. Matem. Univ. Catania.*

John, O. and Stará, J. (1998). On the regularity of weak solutions to parabolic systems in two spatial dimensions. *Comm. Partial Diff. Equs.*, 23:1159–1170.

Kaplan, S. (1966). Abstract boundary value problems for linear parabolic equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)*, 20:395–419.

Koshelev, A. I. (1978). Regularity of solutions for some quasilinear elliptic systems. *Uspekhi Mat. Nauk; Engl. Transl. Russian Math. Surv. 33*, 33:3–49.

Kufner, A. and John, O. and Fučik, S. (1977). *Function spaces.* Akademia, Praha.

Ladyzenskaya, O.A. and Solonnikov, V.A. and Ural'ceva, N.N. (1968). *Linear and quasilinear equations of parabolic type.* Trans. Math. Monographs 28, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

Ladyzenskaya, O.A. and Ural'ceva, N.N. (1968). *Linear and quasilinear elliptic equations.* Academic Press.

Lions, J. L. (Paris (1969) (russ. trans. Moskau 1972)). *Quelques méthodes de résolutions des problèmes aux limites non linéaires.*

Lions, J. L. and Magenes, E. (1968). *Problèmes aux limites non homogénes et applications.* Dunod.

Morrey, C. B. (1968). Partial regularity results for nonlinear systems. *Math. and Mech.*, pages 649–670.

Moser, J. (1961). On Harnack's theorem for elliptic differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 14:577–591.

Naumann, J. (1990). Interior integral estimates on weak solutions of certain degenerate elliptic systems. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 156:113–125.

Naumann, J. and Wolf, J. (1992). On the interior regularity of weak solutions of degenerate elliptic systems (the case $1 < p < 2$). *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 88.

Naumann, J. and Wolf, J. and Wolff, M. (1998). On the Hölder continuity of weak solutions to nonlinear parabolic systems in two space dimensions. *Comment. Math. Univ. Carol.*, 39:237–255.

Naumann, J. and Wolff, M. (1994). Interior integral estimates on weak solutions of nonlinear parabolic systems. *Preprint no. 94-12, Humboldt-Univ. Berlin, Fachber. Math., 22 pp.*

Nečas, J. (1975). *On the regularity of weak solutions to variational equations and inequalities for nonlinear second order elliptic systems.* Equadiff IV, Praha, Springer Verlag Lecture Notes No. 703.

Nečas, J. and Šverák, V. (1991). On regularity of nonlinear parabolic systems. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 18:1–11.

Pepe, L. (1971). Risultati di regularità parziale per soluzione $H^{1,p}$ $(1 < p < 2)$ di sistemi ellittici quasi lineari. *Ann. Ferrara, Sez. VII (Sci. Mat.)*, 16:129–148.

Stein, E. M. (1970). *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton Univ. Press, Princeton.

Uhlenbeck, K. (1977). Regularity for a class of non-linear elliptic systems. *Acta. Math.*, 138:219–240.

Wolf, J. (1997). A generalization of the fundamental estimates for $W^{m,p}-$ solutions $(1 < p < 2)$ of linear system with constant coefficients. *Preprint, Humboldt-Univ. Berlin.*

Yoshida, K. (1965). *Functional Analysis.*

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{R}^m$	Euklidischer Vektorraum der Dimension m über $\mathbb{R}$
$\mathbb{C}^m$	Euklidischer Vektorraum der Dimension m über $\mathbb{C}$
$\cong$	isomorph
$\equiv$	kongruent
$\forall$	für alle
$\exists$	es existiert
$\in$	Element
$A \subset B$	A Teilmenge von B
$A \cap B$	Durchschnitt von A und B
$A \cup B$	Vereinigung von A und B
$A \times B$	Kreuzprodukt von A und B
$f : X \to Y$	f bildet von X in Y ab
$f : x \mapsto y$	f ordnet x das Element y zu
∂A	Rand der Menge A
$\operatorname{dist}(x, A)$	Abstand des Punktes x zur Menge A
$\operatorname{mes}(A)$, $\|A\|$	Lebesguemaß der Menge A
ffa.	für fast alle
f.ü.	fast überall
$\oplus$	Zeichen für direkte Summe
$\operatorname{Re} z$	Realteil von $z \in \mathbb{C}$
$\operatorname{Im} z$	Imaginärteil von $z \in \mathbb{C}$
i	Zeichen für die imaginäre Einheit in $\mathbb{C}$
$\blacksquare$	Ende Beweis, Bemerkung, Definition

Lebenslauf

Name:	Jörg Wolf
Anschrift:	Robert-Siewert-Str.54
	10318 Berlin
Geburtstag, Geburtsort:	18.Mai 1966, Plauen
Familienstand:	verheiratet, ein Kind
1972 - 1980	Besuch der Oberschule in Plauen
1972 - 1980	Besuch der Erweiterten Oberschule in Plauen Abschluss Abitur mit der Note 'Gut'
1986 - 1991	Studium an der Humboldt-Universität zu Berlin in der Fachrichtung Mathematik
1992 - 1994	Koreanistik-,Slavistikstudium
1994 - 1995	Vorbereitung auf ein Promotionsstudium im Fach Mathematik
1995 - 2001	Promotionsstudium im Fach Mathematik
1996 - 1999	Teilnahme am Graduiertenkoeg 'Geometrie und Nichtlineare Analysis' an der Humboldt Universität zu Berlin
seit 1999	wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Humboldt Universität zu Berlin an der mathematisch naturwissenschaftlichen Fakultät II Lehrstuhl von Prof. J. Naumann

Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Arbeit selbständig ohne fremde Hilfe verfaßt und nur die angegebene Literatur und Hilfsmittel verwendet zu haben.

Jörg Wolf
2. November 2001